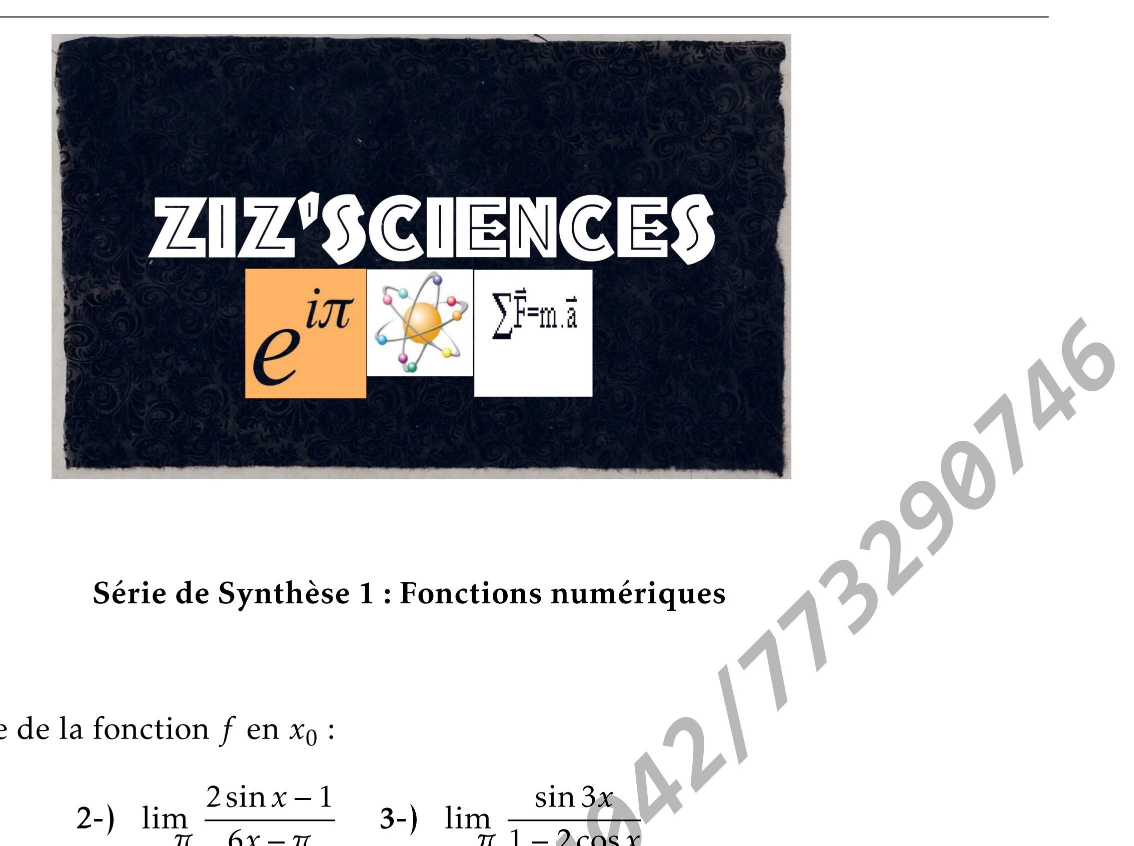
FASCICULE DE MATHEMATIQUES





Série de Synthèse 1 : Fonctions numériques

Exercice 1 :

Calculer la limite de la fonction f en x_0 :

1-) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\tan^2 x}$ **2-)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x-1}{6x-\pi}$ **3-)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$

4-) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin(\cos x)}{\cos x}$ **5-)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin^2 2x}$ **6-)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{2(\sin x-\cos x)}{4x-\pi}$

7-) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x-1}{\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ **8-)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x-1}{x\tan x}$ **9-)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-\cos x)}{\sin 3x-3sinx}$

Exercice 2 :

Étudier les branches infinies des courbes représentatives de dans chacun des cas suivants :

1/ $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{x(x-1)^2}$ **2/** $g(x)=\sqrt{(x+2)^2}-\dfrac{3}{x-1}$

3/ $h(x)=\dfrac{x^2+\sin x}{x}$ **4/** $k(x)=\sqrt{x^2-x+1}-x$

Exercice 3 :

Étudier et représenter les fonctions suivantes :

1/ $f(x)=\sin x+\cos x$ **2/** $h(x)=\sqrt{|x^2-6x+5|}$

3/ $g(x)=\sin 2x\cos x$ **4/** $\dfrac{\cos 2x}{\sin x}$

Exercice 4 :

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$ définie sur $[0;\frac{\pi}{2}[$.

1-) Étudier et représenter graphiquement f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

2-) a-) Montrer que réalise une bijection de $[0;\frac{\pi}{2}[$ vers un intervalle J à préciser.

b-) On notera f^{-1} sa fonction réciproque. Préciser le sens de variation de f^{-1}

c-) f^{-1} est-elle dérivable en $\sqrt{2}$? Si oui calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.

d-) Calculer explicitement $(f^{-1})'(x)$, $x \in J$?

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x(x-2)}{x-1} & si \quad x < 0 \\ f(x) = x + \sqrt{|x^2 - x|} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$ On note $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$ (unité = 1 cm)

1-) a-) Déterminer le domaine de définition $D_f$de f puis écrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.

b-) Déterminer la continuité de f au point d'abscisse $x_0 = 0$.

c-) Étudier la dérivabilité de aux points d'abscisse $x_0 = 0$. et en$x_0 = 1$. . Interpréter les résultats obtenus.

d-) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\,;\,1\}$ puis calculer $f(x)$ dans chacun des intervalles où f est dérivable.

e-) Résoudre dans l'intervalle $]0\,;\,1[$ l'inéquation : $2\sqrt{x - x^2} + 1 - 2x \leq 0$. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\,;\,1[$ puis étudier son signe sur les autres intervalles.

f-) Dresser le tableau de variation de f

2-) a-) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ) en $+\infty$ puis étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (Δ) sur $]1\,;\,+\infty[$ $+\infty$.

b-) Montrer que $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) en $-\infty$ puis étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite (D) sur $]-\infty\,;\,0[$.

3-) Soit g la restriction de à l'intervalle $]1\,;\,+\infty[$.

a-) Montrer que g réalise une bijection de $]1\,;\,+\infty[$ vers un intervalle à préciser.

b-) Soit g^{-1} sa bijection réciproque. Donner les variations de g^{-1} sur J.

c-) g^{-1} est-elle dérivable sur J ? Calculer $(g^{-1})'(2)$.

d-) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4-) a-) Construire $(\mathcal{C}_f)$. On tracera les asymptotes ainsi que les demi-tangentes.

b-) Construire $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$, courbe représentative de g^{-1} dans le même repère (utiliser une couleur différente).

Exercice 6 :

Soit f définie par : $\begin{cases} f(x) = -x + 2 - \dfrac{2x}{x^2+1} & si \quad x \leq 1 \\ \\ f(x) = x - 2 - 3\sqrt{x^2 - 1} & si \quad x > 1 \end{cases}$

Et $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j})$.

1-) Déterminer le domaine de définition de f.

2-) Étudier la continuité de f et la dérivabilité de f au point d'abscisse 1.

3-) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4-) Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ admet deux asymptotes obliques (D_1) et (D_2) à préciser. Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (D_1) et (D_2).

5-) Calculer $f'(x)$ dans chacun des intervalles où f est dérivable. Établir le tableau de variations de f.

6-) Montrer que $(\mathscr{C}_f)$ coupe la droite d'équation $y = x$ en point unique dont l'abscisse $x_0 \in]\frac{1}{3} ; \frac{3}{4}[$

7-) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et les asymptotes (D_1) et (D_2).

8-) Soit g la restriction de f sur l'intervalle. $I =]-\infty ; 1]$

a-) Montrer que g est une bijection de l'intervalle $]-\infty ; 1]$ sur un intervalle J à préciser.

b-) Montrer que g^{-1} est dérivable en 2 et calculer $(g^{-1})'(2)$.

c-) Étudier la dérivabilité de g^{-1} sur J. Établir le tableau de variations de g^{-1}.

d-) Tracer $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ dans le même repère .

Exercice 7 :

1-) On considère l'équation $(E) : |x\sqrt{1-x}| = \frac{1}{3\sqrt{3}}$: Démontrer que (E) admet trois solutions x_1 , x_2 et x_3 telles que : $-\frac{1}{3} < x_1 < 0$, $0 < x_2 < \frac{2}{3}$ et $\frac{2}{3} < x_3 < 1$.

2-) Pour $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$, on pose : $u_i = \frac{3}{2}x_i - \frac{1}{3}$ Démontrer qu'il existe un unique nombre réel θ_i élément de $[0 ; \pi]$ tel que : $u_i = \cos\theta_i$

3-) a-) Démontrer que θ_1, θ_2 et θ_3 sont les solutions dans $[0;\pi]$ de l'équation : $\cos 3\theta = \frac{1}{2}$

b-) En déduire les solutions de (E).

Exercice 8 :

On considère la fonction : $\begin{cases} f(x) = \sin x\sqrt{\sin x} & si \quad x \in [0;\pi] \\ f(x) = \cos x - 1 & si \quad x \in [-\pi; 0[\end{cases}$

1-) Étudier la continuité et la dérivabilité de f sur $[-\pi;\pi]$.

2-) a-) Montrer que la droite $(\Delta) : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie pour (C_f) courbe de f sur $[0;\pi]$.

b-) Étudier et représenter graphiquement f .

3-) Soit g la restriction de f à l'intervalle .$[-\pi; \frac{\pi}{2}]$

a-) Montrer que g admet une bijection réciproque g^{-1} dont on précisera le domaine de définition et les variations.

b-) Préciser l'ensemble de dérivabilité de g^{-1} puis calculer.$(g^{-1})'(-1)$

c-) Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$.

Exercice 9 :

I) Soit $g(x) = x^3 - 3x - 4$ et $h(x) = 2x - \sqrt{x^2+1}$.

1) Déterminer les variations de g et montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]2; 2,3[$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $h(x) \geq 0$; en déduire le signe de $h(x)$.

II) Soit la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3+2x^2}{x^2-1} & si \quad x \geq 0 \\ f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x - 2 & si \quad x < 0 \end{cases}$

1) a) Déterminer D_f puis calculer les limites de f aux bornes de D_f .

b) Étudier les branches infinies de la courbe de$f$.

2) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0

3) a) Montrer que : $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2} & si \quad x \geq 0 \quad x \neq 1 \\ f'(x) = \dfrac{h(x)}{\sqrt{1+x^2}} & si \quad x < 0 \end{cases}$

b) Dresser le tableau de variations de f.

4) Tracer . On prendra $\alpha \approx 2,2$.

5) Soit Φ la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1[$

a) Montrer que Φ admet une bijection réciproque Φ^{-1}. Énoncer les propriétés de Φ^{-1}.

b) Calculer $a = \Phi(-\sqrt{3})$ et $b = \Phi(\frac{1}{2})$ et puis $(\Phi^{-1})'(a)$ et $(\Phi^{-1})'(b)$

Exercice 10 :

Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{4}[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{\cos^4 x}$ et $g(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

1) Vérifier que pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{4}[$, . $g'(x) = \dfrac{3}{\cos^4 x} - \dfrac{2}{\cos^2 x}$

2) En utilisant une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$, trouver une primitive F de f sur $[0; \frac{\pi}{4}[$.

FIN

Problèmes

Problème 1

Soit f une fonction numérique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-x-2}{2x+1} & si \quad x \leq -1 \\ \\ x+1+\sqrt{|x^2-1|} & si \quad x > -1 \end{cases}$$

On note (C) la représentation graphique dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$). (Unité graphique 1 cm)

A) **1.** Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Étudier la continuité et la dérivabilité de f en -1 et en 1.

3. Étudier les variations de f.

4. Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x+1} \quad \forall x \in]-\infty; -1[$. En déduire que (C) admet une asymptote (Δ) non parallèle aux axes de coordonnées, dont on donnera une équation.

Préciser pour $x \leq -1$, la position de (C) par rapport à (Δ).

5. Vérifier que la droite (Δ') d'équation $y = 2x+1$ est aussi asymptote à la courbe (C). Préciser la position par rapport à la courbe pour $x \geq 0$

6. Tracer la courbe (C).

7. Calculer en cm^2, l'aire de la partie du plan délimité par (C), la droite (Δ) et les droites d'équation x=-1 et x=0, a<-1.

B) Soit g la restriction de f à $[1; +\infty[$.

a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on déterminera l'ensemble de définition et l'ensemble de valeurs.

b. Tracer la courbe (C') représentative de g^{-1} dans le même repère que celle de f.

c. $(g^{-1})'(\sqrt{2}+2)$

d. Explicité $g^{-1}(x)$.

Problème 2

A) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $2x - \sqrt{1+x^2} \geq 0$

B) On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = -x + 2\sqrt{1+x^2}$$

1. Étudier les variations de f.

2. (H) désigne la courbe représentative de f dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$; $\vec{j}$). (Unité graphique 2 cm)

a. Montrer que (H) admet deux asymptotes d'équations respectives $y = x$ et $y = -3x$

b. Préciser la position de (H) par rapport à ses asymptotes.

3. Construire (H) ainsi que ses asymptotes.

4. g désigne la restriction de f à l'intervalle $I = \left]-\infty; \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

a. Montrer que g est une bijection de I sur un intervalle que l'on précisera.

b. Construire (H') la représentation de g dans le même repère que (H).

c. Déterminer l'équation de la tangente à (H') au point d'abscisse 2.

d. Expliciter $g^{-1}(x)$.

C) **1.** $F(x) = x\sqrt{1+x^2} + \ln x + \sqrt{1+x^2}) - \frac{x^2}{2}$. Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer l'aire de la portion du plan, ensemble des points M(x ;y) vérifiant.

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq t \\ x \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

t désigne un réel supérieur à 1

Problème 3

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+3x}{1+x} & si \quad x<-1 \\ x+\sqrt{1-x^2} & si \quad -1 \leq x \leq 1 \\ -\cos \pi x & si \quad x>1 \end{cases}$$

A) **1.** Donner l'ensemble de définition de f.

2. Étudier la continuité et la dérivabilité en $x_0=-1$ et en $x_0=1$

3. Étudier les variations de f.

4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique sur]-1 ; 1[.

5. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe quand x tend vers $-\infty$.

6. Construire la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. (Unité graphique 1 cm)

7. **a.** Calculer en cm^2, l'aire $A(\alpha)$ du domaine plan limité par les droites x=-3 et $x=\alpha$ la courbe (C) et la droite $y=x+2$ $(-3<\alpha)$.

b. Calculer $\lim\limits_{\alpha \to -1} A(\alpha)$

B) **1.** Soit g la restriction la restriction de f sur $]-\infty;-1[$.

a. Montrer que g réalise une bijection sur un intervalle à déterminer. Dresser le tableau de variation de g^{-1}.

b. Sans explicité $g^{-1}(x)$, calculer $(g^{-1})'(0)$

2. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère que (C_f).

PROBLÈME : 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathscr{R}=(O;\vec{u};\vec{v})$.
On considère la fonction f définie par :

$$f : [-\pi;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \mapsto f(t)=\frac{9}{5-2\cos t+2\sqrt{3}+\sin t}$$

1. **a)** Trouver deux réels a et t_0 tels que pour tout t appartenant à l'intervalle $[-\pi;\pi]$ on ait **(1 pt)**

$$5-2\cos t+2\sqrt{3}\sin t=5+a\cos(t+t_0)$$

b) En déduire le signe de $5-2\cos t+2\sqrt{3}\sin t$. **(1 pt)**
Montrer que f est définie sur $[-\pi;\pi]$ **(0.5 pt)**

2. Étudier les variation de f, tracer sa courbe représentative dans le repère $\mathscr{R}$. (**1.5 pt**)

Extrait Bac 2010

PROBLÈME : 5

n étant un entier naturel, f_n désigne la fonction numérique définie sur $]-\infty;1]$ par :

$$f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$$

PARTIE : A

1° Dresser le tableau de variation de f_n , pour tout $n \geq 1$, en désignant les deux cas : n pair et n impair .
Déterminer l'unique réel α_n de $]0;1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$, pour $n \geq 1$.

2° Représenter dans un même repère orthonormal les fonctions f_0, f_1 et f_2

PARTIE : B

1° Étudier suivant les valeurs du réel k , le nombre de solutions de l'équation $f_1(x) = k$.

2° Montrer que l'équation $|x\sqrt{1-x}| = \dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ admet trois solutions x_1 , x_2 et x_3 vérifiant :

$$-\frac{1}{3} < x_1 < 0 \quad ,0 < x_2 < \frac{2}{3} \quad et \quad \frac{2}{3} < x_3 < 1.$$

3° Pour $i \in \{1,2,3\}$, on pose alors :

$$u_i = \frac{3}{2}\left(x_i - \frac{1}{3}\right).$$

Montrer qu'il existe un unique réel θ_i , élément de $[0;\pi]$, tel que $u_i = \cos\theta_i$.

4° Montrer que θ_1 , θ_2 et θ_3 sont les solutions de l'équation $\cos 3\theta = \dfrac{1}{2}$, avec $\theta \in [0;\pi]$.

5° Donner alors une valeur approchée à 10^{-5} près de x_1 , x_2 et x_3.

PROBLÈME : 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

et F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie la condition $F(0) = 0$

1° Démontrer que la fonction $x \mapsto -F(-x)$ est une primitive de f sur I.
En déduire que F est impaire.

2° Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = F\left(-\frac{1}{x}\right)$$

a) Démontrer que g est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b) En déduire que, pour tout x strictement positif :

$$F(x) = 2F(1) - F\left(\frac{1}{x}\right).$$

Et que F admet une limite finie L en $+\infty$.

3° On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = F(\tan x)$

a) Déterminer la dérivée de h.

b) En déduire que, pour tout réel x , $h(x) = x$.

c) Calculer $F(1)$ et en déduire la valeur de L

PROBLÈME : 7

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :
$f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$

1° Démontrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer la fonction dérivée de f sur cet intervalle.

2° a) Déterminer les réels positifs tels que $f(x) = 0$. On rangera ces nombres en une suite strictement croissante a_1, a_2, a_3,...

b) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

3° a) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}.$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer les nombres réels strictement positifs tels que $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On rangera ces nombres en une suite strictement croissante b_1, b_2, b_3,...

c) Déterminer les nombres réels strictement positifs tels que $f(x) = -\dfrac{1}{x}$. On rangera ces nombres en une suite strictement croissante c_1, c_2, c_3,...

d) Préciser la position relative de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f et des courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}$ d'équations respectives :

$$y = \frac{1}{x} \quad et \quad y = -\frac{1}{x}.$$

Comparer les tangentes à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{H}$ aux points d'abscisses b_k , ainsi que les tangents à $\mathscr{C}$ et à $\mathscr{H}$ aux points d'abscisses c_k

4° a) Étudier le signe de la fonction $x \mapsto \tan(x) - x$ sur l'intervalle $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
En déduire le signe de f' sur cet intervalle.

b) Démontrer que pour tout entier naturel non nul k, il existe un unique x_k de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$, $tanx_k = x_k$. Justifier que $x_k > k\pi$.

c) En déduire le signe de f' sur l'intervalle $]0;x_1[$, puis sur chacun des intervalles $]x_k;x_{k+1}[$ pour tout entier k.

5° a) Étudier le signe des fonctions u et v définies sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par :
$u(x) = \sin x - x\cos x$ et $v(x) = \sin x \cos x - x$.

b) En déduire que, pour tout réel x de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\cos x \leq f(x) \leq \frac{1}{\cos x}$$

c) Utiliser cet encadrement pour démontrer que f est dérivable en 0 et préciser le nombre dérivé $f'(0)$.

6° a) Dresser le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;3\pi[$.

b) Tracer les courbes $\mathscr{C}$, $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ en se limitant aux points d'abscisses comprises entre 0 et 3π.Et placer les points d'abscisses a_k, b_k, c_k et x_k.
On prendra 1 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 3 cm l'axe des ordonnées.

<u>**PROBLÈME**</u> : <u>8</u>

PARTIE : A Étude de la fonction f

On considère la fonction f définie sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + 1 + \frac{2}{x}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

1/ Étudier la fonction f sur $\mathbb{R}^*$ (limites , dérivée et sens de variation).

2/ soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ dans le repère $(O;\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$.

a) Calculer la limite $\lim\limits_{x\mapsto\pm\infty}[f(x) - (x^2+1)]$. En donner une interprétation graphique.

b) Étudier la position relative des courbes $\mathscr{P}$ et $\mathscr{C}$

c) Résoudre l'inéquation $f(x) \geq 0$

d) Construire les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$ dans le même graphique.

PARTIE : B Étude de la fonction $g(x) = \sqrt{f}$

1/ Conjecturer graphiquement le domaine de définition de g.

2/ a) Quel est l'ensemble D de définition de la fonction .

b) Étudier la fonction g sur chaque intervalle de son ensemble de définition (limites et sens de variation)

3/ Étudier de g au voisinage de -1.

a) Montrer que $h > 0$, $\frac{g(-1-h) - g(-1)}{-h} = -\sqrt{\frac{4+3h+h^2}{h(1+h)}}$.
En déduire que g n'est pas dérivable en -1 .

b) Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à $\mathscr{C}_g$ en A(-1 ; 0)

4/ a) Démontrer que pour tout réel x appartenant à D, On a :

$$g(x) - |x| = \frac{1 + \frac{2}{x}}{\sqrt{x^2 + 1 + \frac{2}{x}} + |x|}$$

b) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$, d"équation $y = x$, est asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $+\infty$.

c) Démontrer que la droite Δ , d"équation $y = -x$, est asymptote à $\mathscr{C}_g$ en $-\infty$.

5/ Tracer les droites $\mathscr{T}$, $\mathscr{D}$ et Δ, puis la courbe $\mathscr{C}_g$

PROBLÈME : 9

PROBLÈME : 10

serie : 1

EXERCICE : 1

Étudier les branches infinies dans les cas suivants :

1-) $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 1}{x(x-1)}$ **2-)** $\sqrt{(x+2)^2} - \frac{3}{x-1}$

3-) $f(x) = \frac{x^2 + \sin x}{x}$ **4-)** $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - x$

EXERCICE : 2

A-) On définit la fonction f_m par : $f_m(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - mx$

1-) Discuter suivant les valeurs du paramètre la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de f_m.

2-) Montre que f_0 admet des asymptotes dont on déterminera les équations et la position relative par rapport a la courbe de f_m.

B-) On définit la fonction g_m par : $g_m(x) = \frac{(m^2 - m)x^2 + 2mx + 1}{(m-1)x^2 + x - 2}$

1-) Discuter suivant les valeurs du paramètre la limite g_m en $+\infty$ et $-\infty$

2-) Montre que g_0 admet une asymptote dont on déterminera une équation.

EXERCICE : 3

Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1-) $f(x) = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ **2-)** $f(x) = \sqrt{|x^2 - 6x + 5|}$ **3-)** $f(x) = \sqrt{x^2 - |x|} - x$ **4-)** $f(x) = \sin 2x \cos x$

5-) $f(x) = \frac{\cos 2x}{\sin x}$ **6-)** $f(x) = \frac{\cos 3x}{1 + \cos 2x}$ **7-)** $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x}$ **8-)** $\sin x(1 + \cos x)$

EXERCICE : 4

1-) Soit la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 4x^3 + 3x^2 - 2$

a-) Étudier les variations de P.

b-) Montrer que sur l'intervalle $[0;+\infty[$, l'équation (E) : admet une solution unique α.

c-) Montrer que sur l'intervalle $]-\infty;0[$, l'équation (E) : n'admet pas de solution.

2-) Soit l'intervalle $I =]-1;+\infty[$, on considère la fonction f définie sur I par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^3+1}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité 4 cm)

a-) En utilisant les résultats du 1) étudier les variations de f.

b-) Déterminer une équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0.

c-) Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et de (T) sur I.

3-) a-) Vérifier et justifier la proposition suivante : $\alpha \in]0.60;0.61[$.

b-) Démontrer que : $f(\alpha) = \dfrac{2}{3\alpha^2}$ et déduire que : $f(\alpha) \in]1.7;1.9[$

4-) Représenter $(\mathscr{C})$; (T) et les droites asymptotes à $(\mathscr{C})$.

EXERCICE : 5

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -x+1+\dfrac{2}{x+1} & si \quad x \leq 0 \\ 3+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1-) Déterminer le domaine D_f et étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

2-) Étudier les asymptotes de $(\mathscr{C})$.

3-) Déterminer le domaine de dérivabilité de f et établir le tableau de variation de f.

4-) Montrer que l'équation $f(x) = 3x$ admet une solution λ tel que : $1 < \lambda < 2$.

5-) Soit g la restriction de f à $[0;+\infty[$; et (Γ) sa courbe représentative. Montrer que g est une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser. Calculer $g(1)$ et $(g^{-1})'\left(\dfrac{6+\sqrt{2}}{2}\right)$.

6-) Construire $(\mathscr{C})$ et (Γ).

EXERCICE : 6

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnés.

1-) Déterminer le domaine D_h et étudier la continuité et la dérivabilité de h en $\dfrac{1}{2}$ et $-\dfrac{1}{2}$; interpréter graphiquement les résultats. Calculer $h'(x)$

2-) a-) Démontrer les équivalences suivantes :

$$\sqrt{4x^2-1}+4x<0 \iff x \in \left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]; \ \sqrt{4x^2-1}-4x>0 \iff x \in \left[-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{5}}{10}\right]$$

b) Déduisez en le signe de $h'(x)$.

3-) Déterminer les limites aux bornes de D_h et établir le tableau de variation de h .

4-) Étudier les asymptotes éventuelles de $(\mathscr{C})$. Construire $(\mathscr{C})$.

5-) Soit g la restriction de h à $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[$; Montrer que g admet une fonction réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et les variations.

6-) tracer (Γ) la courbe représentative de h^{-1} dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

EXERCICE : 7

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

1-) a) Justifier avec précision que pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $x = \tan\alpha$

b) On pose $g(\alpha) = f(\tan\alpha) = (f \circ \tan)(\alpha)$. Déterminer sous la forme la plus s

2-) Montrer que g est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J à préciser. Déduisez en que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle J.

3-) a) Soit la fonction $\phi : \alpha \mapsto \tan\alpha - g(\alpha)$. Après étude de ϕ; montrer que l'équation $g(\alpha) = \tan\alpha \left(\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\right)$ admet une solution unique dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1}près.

b) Déduisez en la résolution de l'équation : $f(x) = x$. Donner une valeur approchée de la solution à 10^{-1} près

EXERCICE : 8

On considère la fonction f définie sur $I = [0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ et par $(\mathscr{C})$sa courbe.

1-) Étudier les variations de f sur I et montrer que $(\mathscr{C})$ admet une droite asymptote.

2-) Soit F la primitive de f sur I tel que $F(0) = 0$. on ne cherche pas à exprimer $F(x)$.

a-) Pour quoi peut on affirmer l'existence de F sur I ?

b-) Quelles sont variation de F sur I ?

3-) On définit sur I les fonctions H et K par : $H(x) = F(x) - x$ et $K(x) = F(x) - \frac{2}{3}x$.

a-) Étudier les variations de H et K sur I.

b-) En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a : $\frac{2}{3} \leq F(x) \leq x$

c-) En déduire la limite de F en $+\infty$ Démontrer que l'équation : $F(x) = \pi$ admet une solution unique δ Vérifiant : $\pi \leq \delta \leq \frac{3}{2}\pi$

EXERCICE : 9

F est la primitive sur $]0;+\infty[$ qui s'annule en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

1-) Montrer que :

a-) Pour tout $x \in]1;+\infty[$ on a $F(x) > 0$.

b-) Pour tout $x \in]0;1[$ on a $F(x) < 0$.

2-) On pose pour tout réel $x > 0$: $G(x) = F(ax)$ où a a est un réel , $a > 0$.

a-) Montrer que G est une autre primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

b-) En déduire que pour tout $x > 0$ et $a > 0$:
$F(ax) = F(a) + F(x)$ puis que $F\left(\dfrac{x}{a}\right) = F(x) - F(a)$

3-) Trouver la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty;0[$ qui s'annule en - 1.

EXERCICE : 10

On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies par :
$U_n = \sin\dfrac{1}{n^2} + \sin\dfrac{2}{n^2} + \cdots + \sin\dfrac{n}{n^2}$ et $V_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2}$

1-) Démontrer que la suite (V_n) converge vers $\dfrac{1}{2}\cdot$.

2-) a-) Démontrer que chacune des trois fonctions numériques de variable réelle :
$f : x \mapsto x - \sin x$ $\quad g : x \mapsto -1 + \dfrac{x^2}{2} + \cos x$ $\quad h : x \mapsto -x + \dfrac{x^3}{6} + \sin x$ ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0;+\infty[$. On pourra utiliser les variations de chacune de ces trois fonctions.

b-) Justifier que pour tout $n \geq 1$: $13+2^3+\cdots+n^3 \leq n^4$ puis en déduire de a-) l'inégalité :
$V_n - \dfrac{1}{6n^2} \leq U_n \leq V_n$.

c-) Démontrer que la suite (U_n) est convergente. Quelle est sa limite ?

EXERCICE : 11

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sin x - \dfrac{2}{3}\sin^3 x$

1-) Justifier le choix de l'intervalle $I = \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ comme intervalle d'étude.

2-) Démontrer que, pour tout nombre réel x : $g'(x) = \cos x \cos 2x$.

3-) Déterminer le signe de $f'(x)$ puis établir le tableau de variations de g .

4-) Construire la courbe $(\mathscr{C})$ de g lorsque x appartient à $[-\pi;\pi]$

EXERCICE : 12

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sin x + \sin 2x}{1 + \cos x}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1-) Déterminer D_f ; justifier que l'ensemble d'étude de f peut être réduit à l'intervalle $[0;\pi]$.

2-) Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer sa dérivée.

3-) Vérifier que sur $[0;\pi]$, $(\mathscr{C})$ présente une branche infinie dont on précisera la nature.

4-) Établir le tableau de variation de f sur $[0;\pi]$.

5-) Tracer $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$; préciser les coordonnées de ses points d'inflexion.

EXERCICE : 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{4\sin^2 x + 3\sin x}{\sin x - 1}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative.

1-) Déterminer D_f. Démontrer que les droites d'équations $x = \dfrac{\pi}{2}$ et $x = \dfrac{3\pi}{2}$ sont des axes de symétrie de $(\mathscr{C})$. A quel ensemble peut-on réduire l'étude de f ?

2-) Démontrer que pour tout $x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{\cos x(2\sin x - 31)(2\sin x - 1)}{(\sin x - 1)^2}$

3-) a-) Étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

b-) Démontrer que sur cet intervalle $(\mathscr{C})$ présente une seule branche infinie dont on précisera la nature.

4-) Tracer $(\mathscr{C})$ sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.

série : 2

EXERCICE : 1

1-) Calculer les limites suivantes :

a-) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\tan x}$ **b-)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin x - 1}{6x - \pi}$ **c-)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{2\sin x - \sqrt{3}}$

d-) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{4x - \pi}$ **e-)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\tan 6x}{1 - 2\sin x}$ **f-)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x + \sin x - 1}{x}$

g-) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$ **h-)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$ **i-)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1 - 2\cos x}{\sin 3x}$ **j-)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\sin 5x}$

2-) Calculer les limites suivantes : on pourra au besoin utiliser les théorèmes de comparaison.

a-) $\lim\limits_{x\to +\infty} 3x^2 - x^{2\sin x}$ **b-)** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{2 - \sin x}$ **c-)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x + \sin x}{4x + 1}$

d-) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(E(x) - x)}{|x|}$ **e-)** $\lim\limits_{x\to +\infty} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$

EXERCICE : 2

On considère la fonction f définie sur $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ par $f(x) = \sqrt[3]{2\cos x - 1}$

1) Étudier et représenter graphiquement f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ vers un intervalle J à préciser.

3) Soit f^{-1} la bijection réciproque de f. Calculer $(f^{-1})'(\sqrt[3]{\sqrt{3} - 1})$

4) Déterminer le domaine de dérivabilité K de f^{-1} puis expliciter l'expression de $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in K$.

EXERCICE : 3

1) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$. On notera alors F la primitive de f vérifiant $F(0) = 0$.

2) Étudier la parité de F et préciser le sens de variation de F sur $\mathbb{R}$.

3) a) Étudier les variations de la fonction $G : x \mapsto F(x) + F(\dfrac{1}{x})\cdot$

b) En déduire qu'il existe une constante c telle que pour tout $x > 0$, on ait :

$$F(x) = c - F(\frac{1}{x})\cdot$$

c) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = c$.

4) On pose pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \tan x$.

a) Montrer que la fonction $\phi(x) : x \mapsto F \circ g(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\phi'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $F \circ g(x) = x\cdot$

c) Déterminer alors $F(1)$, $F(\sqrt{3})$ et $F(\dfrac{\sqrt{3}}{3})$. En déduire que $c = \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE : 4

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction numérique définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = \sum_{k=1}^{n} kx^k$$

1-) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2}\cdot$

2-) Pour tout $x \in [0;1[$, on pose $F(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$. Donner l'expression de $F(x)$.

3-) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution, notée U_n dans l'intervalle $[0;1]$. Calculer U_1 et U_2.

4-) Étudier le sens de variation de la suite (U_n). (On pourra utiliser les variations de $f_n(x)$). En déduire qu'elle converge. On notera l l sa limite.

5-) Démontrer que : $\forall x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $|f_n(x) - F(x)| \leq 3\left(\dfrac{n+1}{2^n}\right)$.

6-) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(U_n) = F(l)$. En déduire la valeur de l. (On pourra utiliser en le justifiant $F(l) = 1$).

EXERCICE : 5 (exclu)

On considère la fonction la fonction f définie de l'intervalle $[0;2\pi]$ vers $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x) = \sin\left[xE\left(\dfrac{\pi}{x}\right)\right] si x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

1-) Étudier la continuité de f en 0.

2-) a-) Résoudre dans $[0;2\pi]$ l'équation $E\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = 0$ puis $E\left(\dfrac{\pi}{x}\right) = P$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

b-) Donner une expression de f sur $[\pi;+\infty[$ puis sur chaque intervalle $\left]\frac{\pi}{p+1};\frac{\pi}{p}\right]$, $(p\in\mathbb{N}^*)$.

c-) Étudier la continuité de f en $\frac{\pi}{p}$ pour tout $(p\in\mathbb{N}^*)$. En déduire le domaine de continuité de f sur $[0;2\pi]$.

3-)a -) Montrer que la limite à droite en $\frac{\pi}{p}$ est finie et donner sa valeur y_p.

b-) Montrer que les points $M_p\left(\frac{\pi}{p};y_p\right)$ $(p\in\mathbb{N}^*)$ appartiennent à une courbe $(\mathscr{S})$ dont on précisera l'équation cartésienne.

4-) a-) Montrer que f est dérivable sur chaque intervalle $I_p=\left]\frac{\pi}{P+1};\frac{\pi}{p}\right]$, $(p\in\mathbb{N}^*)$.

b-) Calculer la dérivée de f sur l'intervalle $I_p=\left]\frac{\pi}{P+1};\frac{\pi}{p}\right]$. En déduire que f réalise une bijection de l'intervalle $I_p=\left]\frac{\pi}{P+1};\frac{\pi}{p}\right]$ vers un intervalle J_p à préciser.

c-) Montrer que la restriction f_p de f à l'intervalle $I_p=\left]\frac{\pi}{P+1};\frac{\pi}{p}\right]$ admet une bijection réciproque dérivable sur un intervalle à préciser et vérifiant :

$$(f_p^{-1})'(x)=\frac{1}{p\sqrt{1-x^2}}.$$

5-) Tracer la courbe représentative de f et la courbe de $(\mathscr{S})$ sur l'intervalle $I_p=\left]\frac{\pi}{6};\pi\right]$ dans un même repère orthonormé (Unité = 5 cm).

EXERCICE : 6

On considère l'équation :

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1=0$$

$n\in\mathbb{N}$ et $n\geq 1$.

1-) a-) Étudiant les variations de la fonction f_n définie par :

$$f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$$

sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

b-) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique a_n dans $[0;1]$.

2-) Étudier la monotonie de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ en calculant $f_{n+1}(a_n)$. En déduire que la suite (a_n) converge.

3-) Montrer que, pour tout entier naturel $n\geq 1$,

$$a_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(a_n)^{n+1}$$

et que pour tout $n\geq 2$ on a :

$$a_n\leq\frac{7}{10}$$

.

4-) En déduire la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$.

EXERCICE : 7

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[0;1]$ telle que $f(0)=f(1)$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et pour $x\in\left[0;1-\frac{1}{n}\right]$, on pose $g(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$.

1-) Justifier que pour tout $x\in[0;1-\frac{1}{n}]$ il existe deux réels m et M tel que $m\leq g(x)\leq M$.

2-) Montrer que $g(0)+g(\frac{1}{n})+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=0$

3-) En déduire que pour $n\in\mathbb{N}^*$ et n fixé il existe $x_0\in[0;1]$ tel que $f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)=f(x_0)$.

EXERCICE : 8

I-) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{x^2-1}\cdot$

1-) Déterminer les nombres réels a et b tels que :

$$\forall x\in D_f, f(x)=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+1}.$$

2-) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer qu'il existe un polynôme P_n de degré n tel que pour tout $x\in D_f$,

$$f^n(x)=\frac{(-1)^n n! P_n(x)}{2(x^2-1)^{n+1}}$$

où $f^{(n)}$ la dérivée nième de f.

II-) Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{(1+x^2)}\cdot$.

1-) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2-) Démontrer, par récurrence, que la dérivée n-ième de f est définie par :

$$f^n(x)=\frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$$

où P_n est un polynôme de degré n. Démontrer que l'on a :

$$P_{n+1}(x)=(1+x^2)P_n'(x)-(2n+2)xP_n(x)$$

EXERCICE : 9

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[1;+\infty[$ vérifiant la relation : $f(1)=0$ et $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$

1-) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[1;+\infty[$

2-) On définie la fonction sur l'intervalle par $g(x)=1-\frac{1}{x}\cdot$. Comparer f' et g' puis f et g sur $[1;+\infty[$.

3-) Montrer alors que f est majorée sur $[1;+\infty[$ et admet une limite l en $+\infty$ vérifiant : $0\leq l\leq 1$

EXERCICE : 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \left|\sin \frac{1}{x}\right|$.

1-) Déterminer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x^2}$ sur $[1;+\infty[\cdot$

2-) Soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$ et G la fonction définie par : $G(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que G est dérivable et calculer $G'(x)$. Préciser $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$.

3-) a-) Montrer que pour tout $x \in [1;+\infty[$, $\left|F\left(\frac{1}{x}\right) - F(x)\right| \leq 1$.

b-) En déduire que la fonction FF est minorée sur $\mathbb{R}_+^*$ (Distinguer deux cas : pour $x < 1$ poser $X = \frac{1}{x}$ et utiliser l'inégalité précédente ; pour $x \geq 1$ utiliser la croissance de F que l'on justifiera).

c-) Démontrer que F admet un prolongement par continuité en 0.

EXERCICE : 11 (bac 2008)

Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{9}{x}$ On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = g(U_n) \quad si \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) Étudier les variations de g puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 3$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{g(U_n) - g(U_{n-1})}{U_n - U_{n-1}}$$

,

b) Déterminer le signe de $U_1 - U_0$ puis montrer que la suite (U_n) est monotone.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction g dans un intervalle approprié, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{g(U_n) - 3}{U_n - 3} < \frac{1}{2}$$

b-) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n - 3 < \frac{1}{2^{n-1}}$$

c-) Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

d-) Déterminer une valeur possible de n pour que U_n˘$3 \leq 10^{-3}$.

EXERCICE : 12

On considère la fonction f f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - \cos x$

1-) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in \left]\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right[\cdot$

2-) Montrer qu'il existe un réel $c \in \left]\alpha; \frac{\pi}{4}\right]$ tel que :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) f'(c)\cdot$$

3-) Montrer que $f'(c) > \frac{3}{2}\cdot$ En déduire :

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} f\left(\frac{\pi}{4}\right) < \alpha < \frac{\pi}{4}\cdot$$

<u>**EXERCICE**</u> : 13

On considère la fonction f définie sur $[3;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x-2} - \sqrt{x-1}\cdot$

1-) Étudier f et montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[3;4]\cdot$

2-) Soit g la fonction définie sur $]3;+\infty$ par : $g(x) = 2 + \frac{2}{\sqrt{x-1}}\cdot$

a-) Prouver que l'équation $f(x) = 0$ a même ensemble de solution que l'équation $g(x) = x$.

b-) Montrer que pour tout $x \in [3;+\infty[$ on a :

$$|g'(x)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot$$

c-) En déduire que pour tout

$$x \in [3;+\infty[\quad |g(x) - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}|x - \alpha|$$

<u>**EXERCICE**</u> : 14

Soit f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$ et $g(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$

1-) Vérifier que $f'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2(x)}\cdot$

2-) En déduire sur I une primitive de la fonction g.

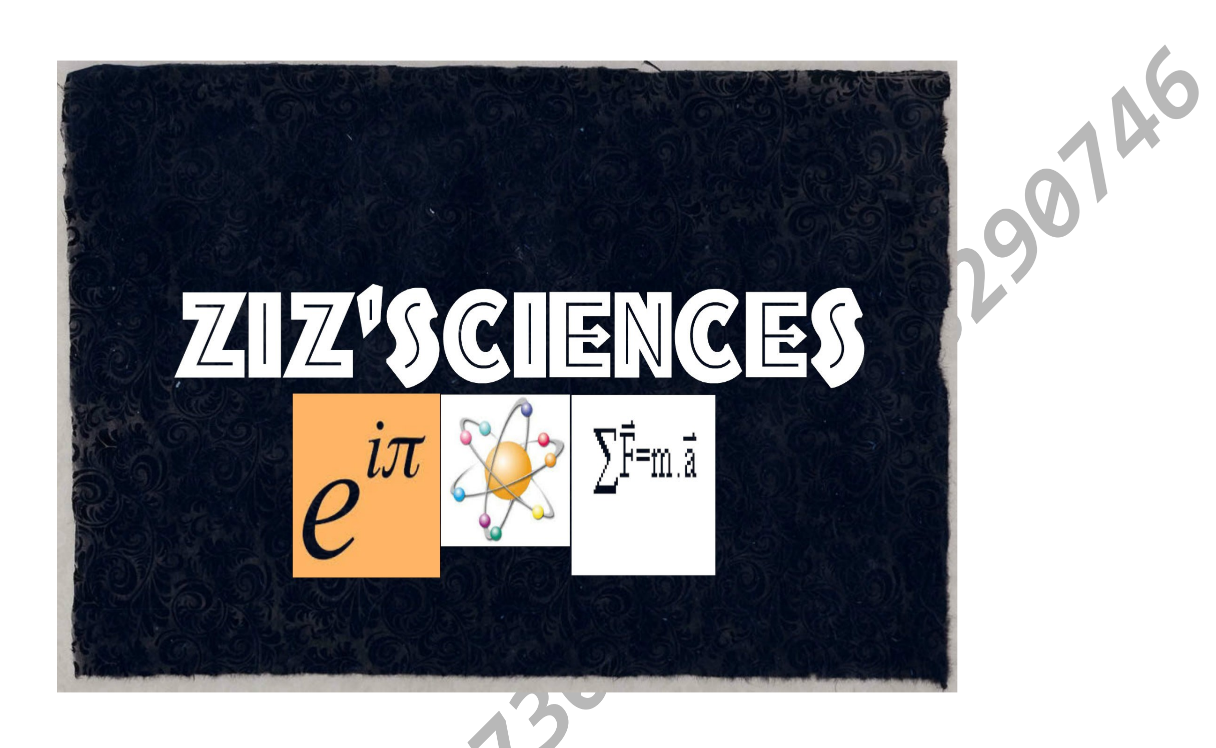
<u>**EXERCICE**</u> : 15

Soit une fonction définie dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x - \frac{4}{3}\cos^3 x$

1-) Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$. Vérifier que pour tout x de $\mathbb{R}$; $f'(x) = -9f(x)$

2-) En déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

3-) Trouver les primitives sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{6}$



0.3 Suites Numériques

0.3.1 Propriétés Générales

Série Suites Numériques

EXERCICE 1

On considère la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{n}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $U_0 = \frac{2}{3\sqrt{2}}$.

1-) Calculer U_1, U_2 et U_3.

2-) a-) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \sqrt{2}U_n - n$. Montrer que V_n est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme .

b-) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

3-) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n.

4-) Déterminer les limites de S_n et U_n en $+\infty$.

EXERCICE 2

On considère la suite (U_n) par : $U_0 = 0$, U_1 et $U_{n+1} = aU_n + (1-a)U_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{R}$: $V_n = U_{n+1} - U_n$.

1-) Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme

2-) Exprimer V_n en fonction de n et a n et a puis U_n en fonction de n et a n et a .

3-) Comment choisir a pour que la suite (U_n) soit convergente ?Quelle est sa limite ?

EXERCICE 3

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 > 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{5U_n + 3}{U_n + 3}$, $n \in \mathbb{N}$.

1-) On suppose que $U_0 = 3$. Quelle est la nature de la suite (U_n) ?

2-) a-) On suppose que $0 < U_0 < 3$. Établir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < U_n < 3$.En déduire que la suite est bornée.

b-) Étudier le sens de variation de la suite (U_n).

3-) On pose pour tout entier naturel n : $V_n = \dfrac{U_n + a}{U_n + b}$ avec a et b des réels distincts.

a-) Déterminer les réels a et b pour que la suite (V_n) soit géométrique.

b-) On suppose que a et b sont les réels trouvés dans 3-)a-). Exprimer en fonction de n et U_0, V_n puis U_n puis calculer leur limite.

EXERCICE 4

I-) Soit W_n la suite définie par : W_0 et $W_n = \dfrac{W_n + 1}{W_n + 3}$pour tout $n \in \mathbb{N}$

1-) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq W_n \leq 1$.

2-) Démontrer par récurrence que (W_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$.

II-) Soit (U_n) et (V_n) les suites définies par : $U_0 = \dfrac{5}{4}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n - n - \dfrac{4}{3} \\ V_n = U_n + \dfrac{3}{2}n - \dfrac{1}{4} \end{cases}$

1-) Calculer V_0, V_1 et V_2.

2-) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

3-) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

4-) Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} V_k$ et $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} U_k$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to} S_n$ et $\lim\limits_{n\to} S'_n$.

EXERCICE 5

On considère la suite U_n définie par : $U_0 = 2$, $U_1 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, $U_n = \dfrac{4U_{n-1} - U_{n-2}}{3}$

1-) Calculer U_2 ,U_3 et U_4.

2-) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = U_n - U_{n-1}$.

a-) Montrer que $V_(n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b-) Exprimer V_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

c-) On pose $P_n = V_1 \times V_2 \times \cdots V_n = \prod_{1}^{n} V_n$. Exprimer P_n en fonction de n.

d-) Calculer $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ en fonction de n puis $S'_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim_{n \to +\infty} S'_n$.

EXERCICE 6

A-) Soit la suite arithmétique (U_n) telle que : $U_1 + U_2 + U_3 = 9$ et $U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 = 35$

1-) Calculer la raison $r > 0$ et le premier terme U_0 de cette suite .

2-) Exprimer U_n en fonction de n.

3-) On pose $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

B-) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = a^{U_n}$ avec $a > 1$.

1-) Montrer que : (V_n) est une suite géométrique. Préciser la raison et le premier terme.

2-) Étudier la convergence de la suite (V_n).

3-) Calculer $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \cdots V_n = \prod_{k=0}^{n} V_k$ en fonction de n .

EXERCICE 7

On considère la suite (V_n) définie par : $V_1 = 6$ et $V_{n+1} = \frac{1}{5}V_n + \frac{16}{5}$

1-) Démontrer que la suite (V_n) est minorée par 4 .

2-) On pose pour tout n $U_n = V_n - a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

a-) Déterminer le nombre réel aa pour que la suite (U_n) soit géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b-) On suppose que a est la valeur trouvée dans 1-)a-). Calculer V_n puis U_n en fonction de n.

3-) On pose $S_n = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ et $T_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$. Exprimer T_n puis S_n en fonction de n. Calculer les limites de T_n et S_n en plus l'infini .

EXERCICE 8

On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$ et $U_n = \frac{5U_n - 3}{3U_n - 1}$.

1-) Calculer les trois premiers termes de la suite (U_n).

2-) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \neq 1$.

3-) a-) On pose $V_n = \frac{U_n + 1}{U_n - 1}$. Montrer que la suite (V_n) est arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b-) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c-) Étudier la convergence de la (U_n)

EXERCICE 9

Soit a un nombre réel positif différent de 1 .

1-) On considère la suite (U_n) définie par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{1+aU_n}{a+U_n}$

a-) Calculer les deux premiers termes de la suite (U_n).

b-) Montrer par récurrence que la suite (U_n) est définie c'est-à-dire $U_n \neq -a$ pour tout $n \in \mathbb{R}$

2-) On pose $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$

a-) Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et le premier terme.

b-) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c-) Étudier la convergence de la (U_n)

EXERCICE 10

I-) Préliminaire : Montrer que pour tout réel a et b strictement positif tel que : $a \geq b$ alors : $\sqrt{a} - \sqrt{b} \leq \sqrt{a-b}$.

II-) Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par : $\begin{cases} 0 < u_0 < v_0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \forall n \geq 0 \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}, \forall n \geq 0 \end{cases}$

1-) Démontrer par récurrence sur nn que (u_n) et (v_n) sont des suites strictement positives.

2-) a-) Calculer $v_{n+1}^2 + u_{n+1}^2$ et en déduire que $\forall n \geq 0$, $u_n \leq v_n$

b-) Démontrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

c-) Démontrer par récurrence sur n que $\forall n \geq 0$, on $0 \leq v_n - u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)\cdot$.

d-) Que peut-on dire des suites (u_n) et (v_n)? Montrer qu'elles convergent vers la même limite.

EXERCICE 12

Pour tout entier naturel n non nul , on pose U_n $\overset{nchiffres}{111\ldots111}$ (Exemple U_3=111=cent onze); d'autre part si a est un chiffre autre que zéro , on pose $S_n(a) = a + aa + aaa + \cdots + aaa\ldots aaa$ (Exemple $S_3(0) = 9 + 99 + 999 = 1107$).

1-) Calculer U_n en fonction de n .

2-) En déduire une expression de $S_n(1) = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ en fonction de n , puis une expression de $S_n(a)$ en fonction de n et a.

3-) Calculer $S_n(1) + S_n(2) + \cdots + S_n(9)$ en fonction de $S_n(1)$, puis en fonction de n.

EXERCICE 13

Soit la suite (U_n) définie par : U_0 , U_1 des réels et $U_{n+2} - 6U_{n+1} + 9U_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1-) On considère la suite (V_n) définie par $V_n = 3^{-n}U_n$.

a-) Exprimer $V_{n+1} - V_n$ en fonction de $V_n - V_{n-1}$ puis exprimer $V_{n+1} - V_n$ en fonction de $V_1 \breve{} V_0$.

b-) Exprimer alors V_n puis U_n en fonction de n, U_0 et U_1.

2-) On suppose que $U_0 = 1$ et $U_1 = \frac{1}{3}$.

a-) Étudier la convergence des suites U_n et V_n.

b-) Calculer $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$ en fonction de n.

c-) La suite S_n admet-elle une limite ?

EXERCICE 13

Soit (U_n) la suite définie par son premier terme U_0 et par le relation de récurrence : $U_{n+1} = \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} - 1$ pour tout entier naturel n.

1-) Démontrer que la suite (U_n) est constante si U_0 prend deux valeurs que l'on précisera.

2-) On suppose maintenant que $U_0 \in]-1;0[$.

a-) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < U_n < 0$, et que (U_n) est strictement décroissante .

b-) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}(U_n + 1)$.

c-) On pose $k = \frac{1}{\sqrt{U_0^2 + 1}}$. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n + 1 \leq k^n(U_0 + 1)$. En déduire la suite (U_n) admet une limite finie L à préciser.

EXERCICE 14

1-) Soit (U_n) la suite définie par : $U_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, pour tout

a-) Montrer que pour tout $k \geq 1$, $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$ et en déduire que pour tout $n > 1$, $U_n \geq 2\sqrt{n+1} - 2$

b-) Montrer que la suite (U_n) est divergente.

2-) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $U_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

a-) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

b-) En déduire la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

0.3.2 Relation de récurrences

EXERCICE 1

On considère la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3

2) La suite (U_n) est - elle arithmétique ? Géométrique ?

3) On définie la suite (V_n) par : $V_n = U_n - 3, \forall n \in \mathbb{N}$

   a) Calculer V_0 , V_1 et V_2

   b) Déterminer la nature de la suite (V_n).

   c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

   d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n$

4) On pose : $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ et $T_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

   a) Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

   b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} T_n$

EXERCICE 2

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 1}{4U_n + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3. En déduire que (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) On considère la suite (U_n) définie par :$V_n = \dfrac{1}{U_n - \frac{1}{2}}$.Démontrer que (V_n) est une suite arithmétique. Préciser le terme général pour le calcul de V_n .

3) En déduire le terme général pour le calcul de U_n.

EXERCICE 3

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n - 3}{U_n + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3. En déduire que (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2) On considère la suite (U_n) définie par :$V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n - 1}$.Démontrer que (V_n) est une suite géométrique. Préciser le terme général pour le calcul de V_n .

3) En déduire le terme général pour le calcul de U_n.

EXERCICE 4

Le prix du kg de sucre était de $P_0 = 75F$ en 1970. On suppose que ce prix augmente régulièrement de 7% par an. On désigne par P_n le prix du kg de sucre en (1970 + n) ; $\forall n \in \mathbb{N}$.

1) Exprimer P_{n+1} en fonction P_n. En déduire la nature de la suite (P_n) et l'expression de P_n en fonction de n.

2) Quel est le prix du kg de sucre :

   a) En 1972

   b) En 1980

3) A partir de quelle année ce prix dépassera -t-il 750 F.

EXERCICE 5

$(V_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique telle que : $V_5 = 7$ et $V_9 = 1$.

1) Déterminer la raison et le premier terme de cette suite.
2) Donner le sens de variation de cette suite et son terme général.
3) $S = V_{53} + V_{54} + \cdots + V_{100}$.

EXERCICE 6

Soit (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 9e \\ U_{n+1} = 3\sqrt{U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On pose $V_n = \ln\left(\dfrac{U_n}{9}\right)$.

1) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2) Exprimer V_n et U_n en fonction de n.
3) Étudier la limite de la suite U_n.

EXERCICE 7

Soit (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{4} \\ U_{n+1} = \dfrac{2+3U_n}{4+U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$.
2) Étudier le sens de variation de U_n.
3) Montrer si la suite (U_n) converge vers l alors $l = 1$.
4) a) Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n \neq 1$.
   b) On pose : $V_n = \dfrac{2+U_n}{1-U_n}$. Montrer que (V_n) est une géométrique. En déduire les expressions de V_n et de U_n en fonction de n.
   c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE 8

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ et (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2\cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = 2\cos\left(\dfrac{\theta}{2^n}\right)$
3) Soit (V_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \dfrac{\theta}{2^n}$. Déterminer $\lim V_n$.
4) En déduire $\lim U_n$

EXERCICE 9

Soient $a \in \mathbb{R}$ et (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_1 = 1 \\ U_{n+1} = aU_n + (1-a)U_{n-1}, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

soit $V_n = U_{n+1} - U_n$.

1) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

2) Exprimer V_n en fonction de n et a.

3) En déduire l'expression de U_n en fonction de n et a.

4) Comment Choisir a pour que U_n soit convergente ? Quelle est alors sa limite ?

EXERCICE 10

On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, la suite de points $M_n(z_n)$ tels que : $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = (1 + i\sqrt{3})z_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer le module et un argument de $1 + i\sqrt{3}$.

2) Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique de z_1 , z_2 et z_3 ,puis placer les points M_0 , M_1 , M_2 et M_3 dans le repère.

3) $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose : $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

   a) Montrer que (d_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b) Exprimer d_n en fonction de n.

   c) Montrer que la longueur l de la ligne brisée formée par les points M_0 , M_1 , M_2 , M_3 , $\cdots$, M_n est égale à $\sqrt{3}(2^n - 1)$

EXERCICE 11

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 4 cm). On considère les suites (U_n) et (V_n) définies respectivement par : $U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $V_n = \frac{n\pi}{3}$. On désigne par M_n le pont d'affixe z_n où $z_n = U_n e^{iV_n}$.

1) a) Quelle est la nature des suites (U_n) et (V_n) ?

   b) Pour quelles valeurs de n z_n est-il réel ?

2) a) Représenter les points M_0 , M_1 , M_2 , M_3 et M_4 dans le repère.

   b) Démontrer que le triangle $0M_nM_{n+1}$ est rectangle en M_{n+1}.

3) a) Soit (a_n) la suite définie par : $a_n = |z_{n+1} - z_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que a_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

   b) Calculer en fonction de n la somme :

$$S_n = M_0M_1 + M_1M_2 + \cdots + M_{n-1}M_n$$

EXERCICE 12

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{1 + e^{-x}}$

1) a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ un solution unique α.

   b) Montrer $\alpha \in I =]1\ ,\ 2[$

2) a) Montrer que I est stable par g : c'est à dire que $g(I) \subset I$

b) montrer que pour tout $x \in I$, $|g'(x)| \leq \dfrac{1}{2e} \leq \dfrac{1}{5}$

c) En déduire que : $\forall x \in I$, $|g(x) - \alpha| \leq |x - \alpha|$.

3) Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{3}{2} \\ U_{n+1} = g(U_n), \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Sans faire de calculs représenter graphiquement les premiers termes de la suite.

b) Établir par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

i) $U_n \in I$

ii) $|U_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{5}|U_n - \alpha|$.

iii) $|U_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

4) a) Déduire des questions précédentes que (U_n) converge vers α.

b) Déterminer un entier n_0 tel que U_{n_0} soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près

EXERCICE 13

Soit la suite (U_n) telle que : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ -2U_{n+1} + U_n = 2n + 3, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer qu'il existe un entier naturel b indépendant de n tel que : $V_n = U_n + bn - 1$ soit le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) En déduire que : $U_n = \dfrac{1}{2^n} - 2n + 1$

3) On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} V_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k$.

a) Exprimer S_n et T_n en fonction de n.

b) Étudier la convergence de ces deux suites.

EXERCICE 14

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + an + b, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Soit $V_n = \dfrac{1}{3}U_n + n$ déterminer a et b pour que (V_n) soit le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) a) Exprimer V_n et U_n en fonction de n.

b) Étudier la convergence de la suite (V_n).

3) Exprimer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} V_k$ puis $S'_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k$ en fonction de n.

EXERCICE 15 **NB : Le but de l'exercice est le calcul de** $\cos \dfrac{\pi}{5}$

1) Au nombre complexe z on associe le nombre complexe : $Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$

a) Vérifier que si $z \neq 1$ alors $Z = \dfrac{1 - z^5}{1 - z}$.

b) On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. Calculer Z et en déduire la valeur de :
$S = 1 + \cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5} + \cos\dfrac{8\pi}{5}$

2) Montrer que :

a) $\cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{8\pi}{5} = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right) - 2$

b) $\cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5} = -2\cos\dfrac{\pi}{5}$

3) Utiliser 2) et 1) b) pour calculer $\cos\dfrac{\pi}{5}$

EXERCICE 16

On considère la suite z_n définie par : $\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = (1+i)z_n + 2i \text{ , } \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer z_1 et z_2 .

2) On définie la suite (U_n) par : $U_n = z_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que : $U_n = (2+i)(1+i)^n$

b) Exprimer z_n en fonction de n.

3) Soit M_{n+1} ; M_n , A et B les points d'affixes respectives z_{n+1} , z_n , i et $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.
Démontrer que : $\dfrac{AM_{n+1}}{BM_n} = \sqrt{2}$ et $\left(\overrightarrow{BM_n} \text{ ; } \overrightarrow{AM_{n+1}}\right) = \dfrac{\pi}{4}(2\pi)$

EXERCICE 17

Le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$).

1) Soit S la similitude plane directe de centre $\omega(1)$ qui transforme le point $A(i)$ en O origine du repère.

a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude.

b) En déduire une écriture complexe de S.

2) Soit z_n la suite de nombre complexe définie par : $\begin{cases} z_0 = 5 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2}z_n + \dfrac{1-i}{2} \text{ , } \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
On note le point M_n d'affixe z_n et on pose $Z_n = z_n - 1$

a) Construire les points M_0 ; M_1 ; M_2 ; M_3 ; M_4 ; M_5 ; M_6

b) Prouver que (Z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimer Z_n , puis z_n en fonction de n.

c) Prouver que : $M_nM_{n+1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

d) Calculer la longueur L_n de la ligne polygonale $M_0M_1M_2\ldots M_{n+1}$, ainsi que la limite lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 18

Soit (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 \in [0\,;\,1] \\ U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+U_n}{2}}, \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq U_n \leq 1$
2) Montrer que la suite (U_n) est croissante. En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

EXERCICE 19

Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels a, b et c.

1) a,b et c sont trois termes d'une progression arithmétique tel que : $a+b+c=21$ et $abc=-105$.
2) a,b et c sont trois termes d'une progression géométrique tel que : $a+b+c=63$ et $abc=1728$.

EXERCICE 20

Soit a un réel positif. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$

EXERCICE 21

On considère (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2\,;\, U_1 = 3 \\ U_n = \dfrac{4U_{n-1} - U_{n-2}}{3}, \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$

1) Calculer U_2 , U_3 , U_4
2) On définie la suite $(V_n)_{n\geq 1}$ par : $V_n = U_n - U_{n-1}$
   a) Calculer V_1 , V_2 , V_3
   b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique. Exprimer V_n en fonction de n.
   c) Exprimer $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$ en fonction de n.

EXERCICE 22

On cherche à étudier la convergence de la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{3}{U_n}\right), \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$

1) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{3}{x}\right)$.
   a) Étudier les variations de f.
   b) Montrer que si $x \in [\sqrt{3}\,;+\infty[$ alors $f(x) \in [\sqrt{3}\,;+\infty[$.
   c) Montrer que pour tout $x \in [\sqrt{3}\,;+\infty[$, $0 \leq f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
2) Montrer par récurrence que sur n, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [\sqrt{3}\,;+\infty[$
3) En déduire que $0 \leq U_n - \sqrt{3} \leq \dfrac{1}{2}(U_{n-1} - \sqrt{3})$ puis $0 \leq U_n - \sqrt{3} \leq \dfrac{1}{2^n}(U_0 - \sqrt{3})$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

EXERCICE 23

Soit suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{2}{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + \dfrac{n}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2.
2) Soit (V_n) la suite définie par : $V_n = U_n\sqrt{2} - n \quad \forall n \geq 0$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.
   c) Calculer la limite de U_n
3) On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
   a) Exprimer S_n en fonction de n.
   b) Étudier La limite de S_n.

EXERCICE 24

Soit a un nombre réel non nul et la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_n = aU_{n-1} + 2, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$

1) On suppose que $a = 1$
   a) Quelle est la nature de la suite (U_n).
   b) Calculer le centième terme de cette suite.
   c) Déterminer la valeur de $S = 1 + 3 + 5 + \cdots + U_{99}$
2) On suppose que $a = 3$ et on définie la suite (V_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ V_n = U_n + 1$
   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. (U_n) est-elle convergente ? pourquoi ?
3) On ne donne pas a mais on définie la suite W_n telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ W_n = U_n - \dfrac{2}{1-a}$ $a \neq 1$.
   a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   b) Pour quelles valeurs de a, (U_n) sera - t- elle convergente ? Calculer alors sa limite.

EXERCICE 25

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite définie pour tout n non nul par : $U_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+k}}$

1- Démontrer que pour tout n non nul on a : $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

2- En déduire que la suite (U_n) est convergente vers 1.

EXERCICE 26 : SUITES ADJACENTES

Soient (U_n) et (V_n) par : $\begin{cases} U_1 = 1 \quad U_{n+1} = \frac{1}{3}(U_n + 2V_n) \; et \\ V_1 = 12 \quad V_{n+1} = \frac{1}{4}(U_n + 3V_n) \end{cases}$

1- Calculer U_2, V_2 , U_3 et V_3

2- On pose $W_n = V_n - U_n$. Montrer que (W_n) est une suite géométrique et exprimer W_n en fonction de n. Pour n non nul quelle est la limite de la suite (W_n) ?

3- a) Montrer que (U_n) est une suite croissante et (V_n) est une suite décroissante.

b) Montrer que U_n est majorée par le réel V_1 et (V_n) est minorée par le réel (U_1)

c) Que peut-on dire des suites (U_n) et (V_n)?

4- On pose $T_n = 3U_n + 8V_n$, Pour tout entier n non nul. Montrer que la suite (T_n) est constante. En déduire de $T_n = 99$ pour tout entier non nul.

5- a) A partir des expression de W_n et T_n , exprimer U_n et V_n en fonction de n.

b) Vérifier que U_n et V_n ont même limite.

c) Que peut - on en conclure.

d) En déduire la limite des U_n et V_n.

EXERCICE 27

Soit a et b deux nombres réels vérifiant $0 < a < b$.

On définit les suites (U_n) et (V_n) par :

$$\begin{cases} U_0 = a \quad et \quad \forall n \in \mathbb{R}, \quad U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \\ V_0 = b \quad et \quad \forall n \in \mathbb{R}, \quad V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

1° Vérifier que (U_n) et (V_n) sont strictement positifs.

2° On pose, pour tout entier naturel n, $W_n = V_n - U_n$.
Démontrer que $0 \leq W_{n+1} \leq \frac{1}{2}W_n$ et en déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que :
pour tout entier naturel n, on a $0 \leq W_{n+1} \leq \frac{b-a}{2^n}$

3° Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

4° Que peut-on déduire pour les suites (U_n) et (V_n)?

5° A l'aide de l'étude de la suite (U_nV_n), déterminer la valeur de la limite commune des suites (U_n) et (V_n)

Application : En prenant a=3 et b=5 , déterminer à l'aide de (U_n) et (V_n) un encadrement d'amplitude inférieure à 10^{-2} de $\sqrt{15}$ par deux rationnels.

EXERCICE 28

On définit les suites (U_n) et (V_n) par :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad et \quad V_n = U_n + \frac{1}{n!}$$

Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes.

EXERCICE 29

On donne la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \dfrac{1}{\sqrt{2n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n^2+n}}$

1) a. Écrire V_n sous forme de somme.

   b. Montrer que : $\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n^2+k}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n^2+1}}$

   c. En déduire un encadrement de V_n.

2) On utilisant le théorème dit « Des gendarme », déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$.

EXERCICE 30

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$.

   a) Étudier les variations de f. Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$de la fonction f .

   b) En utilisant la courbe $\mathscr{C}$et la droite d'équation $y = x$,représenter les premier termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses.

2) **a)** Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x)$ appartient à $]0\,;+\infty[$.

   b) En déduire que la suite (U_n) est définie pour tout entier n, et que $(U_n) > 0$.

3) **a)** Démontrer que, pour tout entier n, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \leq \dfrac{1}{2}$

   b) En remarquant que $\dfrac{U_n}{U_0} = \dfrac{U_n}{U_{n-1}} \times \dfrac{U_{n-1}}{U_{n-2}} \times \cdots \times \dfrac{U_2}{U_1} \times \dfrac{U_1}{U_0}$.

   Démontrer que $U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

   c) La suite (U_n) est - elle convergent ? justifier.

EXERCICE 31

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{7U_n+3}{2U_n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Dans un plan rapporté à un repère orthonormal, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{7x+3}{2x+2}$$

   et représenter les premier termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses. .

   b) Émettre une conjecture sur la limite de la suite (U_n).

2) **a)** Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x)$ appartient à $]0\,;+\infty[$.

   b) En déduire que la suite (U_n) est définie pour tout entier n, et que $(U_n) > 0$.

3) **a)** Démontrer que, pour tout entier n :

$$|U_{n+1}-3| \leq \frac{1}{2}|U_n-3| \qquad \text{puis} \quad |U_{n+1}-3| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

b) En déduire que la suite (U_n) converge vers 3.

EXERCICE 32

Soit (U_n) la suite définie pour $\forall n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n} \end{cases}$

1) Illustrer graphiquement le processus de génération des termes de la suite (U_n) et faire une conjecture sur la limite éventuelle de la suite (U_n)

2) Démontrer que si , $\frac{1}{2} \leq x < 1$, alors $\frac{1}{2} \leq \sqrt{x} < 1$. En déduire successivement que pour tout entier n :
$\frac{1}{2} \leq U_n < 1$ et $\frac{1-U_{n+1}}{1-U_n} = \frac{1}{\sqrt{U_n}+1} \leq \frac{2}{3}$
puis $1-U_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

3) En déduire que la suite (U_n) converge vers un réel que l'on précisera.

EXERCICE 33

On cherche à étudier la convergence de la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{3}{U_n}\right), \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$

1) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$.

   a) Étudier les variations de f.

   b) Montrer que si $x \in [\sqrt{3}\,;+\infty[$ alors $f(x) \in [\sqrt{3}\,;+\infty[$.

   c) Montrer que pour tout $x \in [\sqrt{3}\,;+\infty[$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

2) Montrer par récurrence que sur n, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [\sqrt{3}\,;+\infty[$

3) En déduire que $0 \leq U_n - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2}(U_{n-1} - \sqrt{3})$ puis $0 \leq U_n - \sqrt{3} \leq \frac{1}{2^n}(U_0 - \sqrt{3})$. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

EXERCICE 34

On cherche à étudier la convergence de la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{5}{U_n}\right), \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$

Une autre suite, (V_n), est définie, pour tout entier naturel n, par :

$$V_n = \frac{5}{U_n}$$

.

1) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$.

a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, $f(x)-f(\sqrt{5})=\frac{1}{2}\frac{(x-\sqrt{5})^2}{2x}$, et en déduire que f admet un minimum égal à $\sqrt{5}$ pour $x=\sqrt{5}$

b) En déduire que la suite (U_n) est minorée par $\sqrt{5}$.

c) Montrer que, pour tout réel x $x\in]0\,;+\infty[$, $f(x)-x=\frac{5-x^2}{2x}$. En déduire que, pour tout réel $x\geq\sqrt{5}$, on a $f(x)\leq x$. Montrer alors que la suite (U_n) est décroissante

2) En utilisant les résultats montrés dans la partie 1), justifier que (V_n) est majoré par $\sqrt{5}$ et qu'elle est croissante

3) D'après ce qui précède, on a les inégalités suivantes :

$$V_0 \leq V_1 \leq \ldots V_n \leq \ldots \leq \sqrt{5} \leq \ldots \leq U_n \leq \ldots \leq U_1 \leq U_0$$

EXERCICE 35

Le but de cet exercice est de montrer que la suite définie par un nombre réel strictement positif et par la récurrence $\left\{ U_0 \geq 0 U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right), \quad \forall n \geq 0 \right.$ où a est un nombre réel positif quelconque, converge vers $\sqrt{a}$

1) C'est un simple calcul, qui n'utilise que les identités pour le carré d'une somme et d'une différence.

$$\begin{aligned}
U_{n+1}^2 - a &= \left[\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)^2 - a\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[U_n^2 + 2a + \left(\frac{a}{U_n}\right)^2 - a\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[U_n^2 + 2a + \left(\frac{a}{U_n}\right)^2 - 4a\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[U_n^2 - 2a + \left(\frac{a}{U_n}\right)^2\right] \\
&= \left[\frac{1}{2}\left(U_n - \frac{a}{U_n}\right)\right]^2 \\
&= \frac{(U_n^2 - a)^2}{4a^2}
\end{aligned}$$

2) Pour montrer que si $n>1$ alors $U_n \geq \sqrt{a}$, il suffit d'utiliser l'identité de la question précédente. En effet : $U_{n+1}^2 - a = \frac{(U_n^2-a)^2}{4U_n^2} \geq 0$, car le terme à droite du quotient d'un nombre réel non négatif par un nombre réel positif .

Par conséquent , $U_{n+1}^2 \geq a$ pour tout $n \geq 1$.

Prouvons maintenant que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ est croissante.Comme d'habitude Calculons la différence : $U_{n+1}-U_n = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right) - U_n = \frac{1}{2}\left(U_n - \frac{a}{U_n}\right)$, on vient de voir que $U_n \geq \sqrt{a}$ ce qui entraine que

$U_n^2 \geq a \quad \Leftrightarrow \quad U_n \geq \frac{a}{U_n} \quad \Leftrightarrow \frac{a}{U_n} - U_n.$

On en déduit que : $U_{n+1} - U_n \leq 0$, donc $(U_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

3) Le raisonnement ci-dessus montre que (U_n) est une suite croissante et minorée par $\sqrt{a}$. D'après le critère de convergence que l'on a vu en cours , (U_n) est une suite convergente. Notons l sa limite . Afin de calculer la valeur de l on utilise la relation de récurrence. On a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} U_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n}\right)$ et par conséquent l satisfait à la condition

$$l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \quad \Leftrightarrow 2l = l + \frac{a}{l} \quad \Leftrightarrow l^2 = a$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{a}$

Ce que l'on voulait prouver.

PROBLÈME : 1 SUITE(9 points)

Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} x_0 = 2 \; ; \; y_0 = 2 \\ x_n = \frac{y_{n-1}}{4} \qquad et \qquad y_n = \frac{3}{4}x_{n-1} + \frac{1}{2}y_{n-1} \end{cases}$$

1) Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $V_n = x_n + y_n$, $n \in \mathbb{N}$.
   a. Monter que (V_n) est une suite géométrique.
   b. Étudier la convergence de (V_n) .
   c. Exprimer $x_n + y_n$ en fonction de n.
2) a. Démonter par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $x_n > 0$ et $y_n > 0$.
   b. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \frac{x_n}{y_n}$. Démontrer que : $U_n = \frac{1}{3U_n + 2}$
3) Soit (W_n) la suite définie par : $W_n = \frac{U_n - \frac{1}{3}}{U_n + 1}$
   a. Démonter que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   b. Donner l'expression de W_n en fonction de n.
   c. Puis celle de U_n en fonction de n.
   d. Étudier la convergence de (U_n) .
4) En utilisant les valeurs de $U_n = \frac{x_n}{y_n}$ et $V_n = x_n + y_n$.
   a. Donner les expression de x_n et de y_n en fonction de n.
   b. En déduire les limites des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

EXERCICE : 36

On considère la suite définie pour tout entier naturel n par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 2} \end{cases}$

On note f la fonction numérique associée définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+2}$

PARTIE 1 Représentation et conjecture

1/ Étudier les variations de la fonction f, et dresser son tableau de variation sur $]0;+\infty[$.

- Tracer sa courbe
- Déterminer graphiquement les premier terme de la suite (U_n)

2/ Par simple lecture graphique

- Donner un majorant et un minorant de la suite (U_n)
- Indiquer son sens de variation

PARTIE 2 Démonstration

1/ Majorant et Minorant.

a) Montrer que si $x \in [0;2]$ alors $f(x) \in [0;2]$

b) si un terme U_n appartient à l'intervalle $[0;2]$, que peut-on dire du terme suivant ?

En raisonnant de proche en proche justifier que :

Pour tout $n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq 2$

2/ Sens de variation

a) Montrer que pour tout n :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2 + U_n - U_n^2}{\sqrt{2 + U_n} + U_n}$$

et en déduire que $U_{n+1} - U_n$ est du signe de $2 + U_n - U_n^2$.

b) En remarquant que pour tout x, $2 + x - x^2 = (2 - x)(1 + x)$, déterminer le signe de $U_{n+1} - U_n$ puis conclure sur le sens de variation de la suite.

3/ Usage du théorème des accroissements finis

a) Montrer que pour tout entier naturel n $U_{n+1} - 2 = \dfrac{U_n - 2}{\sqrt{U_n + 2} + 2}$ et déduire que $|U_{n+1} - 2| \leq \dfrac{1}{2}|U_n - 2|$

b) Justifier alors que :

$|U_0 - 2| \leq 2$; $|U_1 - 2| \leq 1$; $|U_2 - 2| \leq \dfrac{1}{2}$; … ;$|U_n - 2| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

3/ Usage du théorème des gendarmes

a) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} |U_n - 2|$

b) Déterminer la limite de la suite $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

EXERCICE : 37

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 5$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = \dfrac{2}{U_n} + 1$.

On note f la fonction définie de $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1$, ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans le plan rapporté a un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et ($\mathscr{D}$) la droite d'équation $y = x$.

PARTIE : A RECHERCHE D'UNE CONJECTURE

1 Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) et la droite ($\mathscr{D}$) en prenant 2 cm pour unité graphique. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe ($\mathscr{C}$) et de la droite ($\mathscr{D}$).

2 En utilisant la courbe ($\mathscr{C}$) et la droite ($\mathscr{D}$) , représenter sur l'axe des abscisse les premier terme de la suite (U_n).
Émettre une conjecture sur la convergence de la suite (U_n)

PARTIE : B ÉTUDE DE LA SUITE (U_n)

1 Démontrer que si $\frac{7}{5} < x < 5$, alors $\frac{7}{5} < f(x) < 5$.
En déduire que la suite (U_n) est bien définie, pour tout entier n , qu'elle est bornée par $\frac{7}{5}$ et 5.Est-elle monotone ?
Justifier.

2 a) Démontrer que pour tout n, $U_{n+1} - 2 = \frac{2 - U_n}{U_n}$, puis que $|U_{n+1} - 2| \leq \frac{5}{7}|U_n - 2|$.

b) En déduire que la suite (V_n) définie pour tout entier n, par $V_n = \frac{|U_n - 2|}{\left(\frac{5}{7}\right)^n}$, est décroissante. En comparant V_n et V_0, établir que $|U_n - 2| \leq 3\left(\frac{5}{7}\right)^n$.

c) Démontrer que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite.

PARTIE C CALCUL DE U_n en fonction de n

1 Démontrer que la suite (W_n) définie, pour tout n, par $W_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$, est une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial.

2 Exprimer U_n en fonction de W_n, puis établir que $U_n = \frac{4 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}$; pour tout entier n.

3 Utiliser le résultat précédent pour retrouver le fait que la suite (U_n) converge vers 2.

EXERCICE 36 Raisonnement par récurrence

1) On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 2 \\ U_0 = 5 \end{cases}$
Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n \geq -3$

2) On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \geq 1$ par :
$U_n = \sum_{p=1}^{n}(2p - 1)$ (*Somme des n premiers nombres impairs*).
Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n = n^2$.

3) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel $n \geq 1$ que :

$$\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4) Démontrer par récurrence sur l'entier naturel $n \geq 1$ que :

$$\sum_{p=1}^{n} p^3 = \left(\sum_{p=1}^{n} p\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

5) Démontrer que $\forall n \geq 1$

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p(p+1)} = \frac{n}{(n+1)}$$

6) Inégalité de Bernoulli : Démontrer que pour tout $x \in]-1;+\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1+nx$

7) Montrer que pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

8) On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par la relation de récurrence $\begin{cases} U_{n+2} = 5U_{n12} - 6U_n \\ U_0 = 1 \\ U_1 = 2 \end{cases}$
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2^n$.

9) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n$.
Démontrer que f_n est dérivable et que pour tout réel x , $f_n'(x) = nx^{n-1}$

10) Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $n! \geq 2^{n-1}$

11) Donner le nombre de diagonales d'un quadrilatère, d'un pentagone, et d'un hexagone.
On note d_n, Le nombre de diagonale d'un polygone convexe à n sommets, $n \geq 4$.
Deux des formules suivantes sont vraies pour $n \geq 4$.

a) $d_{n+1} = d_n + 3$ **b)** $d_{n+1} = 2d_n + (-1)^n$ **c)** $d_{n+1} = d_n + n - 1$

d) $d_{n+1} = d_n + n - 2$ **e)** $d_n = \dfrac{n^2 - 3n}{2}$

Laquelle ? Déterminer la première formule à l'aide des graphiques et l'utiliser pour démontrer par récurrence la seconde.

12) On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 8$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \sqrt{U_n + 1}$.
Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq U_{n+1} \leq U_n$. On pourra étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$ pour prouver l'hérédité.

NOMBRES COMPLEXES

1 Mettre les complexes suivants sous forme algébrique :

$z_1 = \left(-\sqrt{3}+\frac{i}{2}\right)\left(-\sqrt{3}-\frac{i}{2}\right)$; $z_2 = -i^3(1+5i)(3-i)^2$;

$z_3 = (\sqrt{2}-\sqrt{6}i)^3 - (\sqrt{2}+i)^3$; $z_4 = \frac{3-2i}{4i} - \frac{2-5i}{3i-2}$;

$z_5 = \frac{i}{1+\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$; $z_6 = \frac{\left(-2+i\sqrt{3}\right)^3}{(1+i)^4}$.

2 Démontrer que si les nombres complexes z_1 et z_2 ont pour module 1 alors le nombre complexe $z = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

3 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R} \iff |z| = 1$.

4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

1) $5z - 2|z| = 5 + 20i$
2) $z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i = 0$ sachant qu'elle admet une racine réelle.
3) $z^3 + 2z^2 + 7iz - 5 - i = 0$ sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.
4) $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$.
5) $z^4 - (3-2i)z^2 + 8 + 6i = 0$

5 Déterminer et construire dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ l'ensemble des points M d'affixe z, tels que :

a) $|z+2| = 2\,|z+i|$ b) $\left|(1+i\sqrt{3})z + 4\sqrt{3} - 4i\right| = 4$

c) $\left|\frac{\bar{z}-3+2i}{z-4i}\right| = 1$ d) $|(1+i)z - 3 + 3i|^2 + |z-6|^2 = 54$

6 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, soit M le point d'affixe $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels, A le point d'affixe $1-2i$ et B le point d'affixe i. On pose $Z = \frac{z-1+2i}{z-i}$.

1) Soit les réels X et Y tels que $Z = X + iY$. Exprimer X et Y en fonction de x et y.
2) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel.
3) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur.
4) Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{G}$ des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$.

7 On note $\mathscr{P}$ le plan complexe et A le point d'affixe $3-i$. Soit f l'application de $\mathscr{P} \setminus \{A\}$ dans $\mathscr{P}$ qui a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' défini par $z' = \frac{2iz-4+2i}{z-3+i}$.

1) Déterminer P' image par f du point P d'affixe $1+i$.
2) Déterminer le point Q dont l'image par f est le point Q' d'affixe $1+i$.
3) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) z' est réel b) z' est imaginaire pur c) $|z'| = 2$.

8 Pour tout complexe z on pose $z' = \frac{z-1}{\bar{z}-1}$. Soient A, B, M et M' les points d'affixes respectives 1, -1, z et z' dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Comparer $|z-1|$ et $|\bar{z}-1|$.
2) En déduire que le point M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1.
3) Soit $r = \frac{z'+1}{z-1}$. Exprimer r en fonction de z et montrer que r est un nombre réel.
4) En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.
5) Proposer une construction géométrique du point M' connaissant le point M. On fera une figure.

9 Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle et préciser les parties réelles et imaginaires.

$z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{-1+i}$; $z_2 = \frac{(1+i)^9}{(-1+i)^7}$; $z_3 = \left(\frac{-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^5$;

$z_4 = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{15}+i}$.

10 Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$. Déterminer (en fonction des valeurs de θ), le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = \cos\theta - i\sin\theta$; $z_2 = \sin\theta + i\cos\theta$;

$z_3 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$; $z_4 = \frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$;

$z_5 = \cos\theta + i(1+\sin\theta)$

$z_6 = \frac{(1-i\sqrt{3})(\cos\theta + i\sin\theta)}{\cos\theta + \sin\theta + i(\cos\theta - \sin\theta)}$

11 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_\theta = -\sin 2\theta + 2i\cos^2\theta$.

1) Déterminer le module et un argument de z_θ. On discutera en fonction des valeurs de θ.

2) Déterminer l'ensemble des nombres réels θ tels que $|z_\theta| = |z_\theta - 1|$.

12 Soit $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 1 - i$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1) Écrire z_1, z_2 et Z sous forme trigonométrique.
2) Calculer Z sous forme algébrique.
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x :
$\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)\cos x + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\sin x = 2$.

13 On considère le nombre complexe $u = -3 + 3i$.

1) Écrire u sous forme trigonométrique.
2) Déterminer le nombre complexe z tel que :
$uz = 6\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\sin\dfrac{7\pi}{12}\right)$.
3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{17\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{17\pi}{12}$.

14 Soit $u = 5\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$.

1) Calculer u^2, en déduire le module et un argument de u.
2) Soit $z = \lambda e^{i\theta}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0; 2\pi[$. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

a) uz est réel b) uz est imaginaire pur c) $|uz| = 15$.

15 On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Montrer de deux façons différentes les propositions suivantes :

a) Soit $A(-2+i)$, $B(-2-2i)$ et $C\left(\dfrac{3\sqrt{3}-4-i}{2}\right)$. Le triangle ABC est équilatéral.
b) Soit $P(-2-i)$, $Q(5+2i)$ et $R(-8+13i)$. Le triangle PQR est rectangle en P.
c) Soit $S(-1-5i)$, $T(2+i)$ et $U(4+5i)$. Les points S, T et U sont alignés.

16 Soit α un paramètre réel, $\alpha \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. On considère l'équation (E): $(\cos 2\alpha)z^2 - 2i(\cos\alpha)z - 1 = 0$ où z est une inconnue complexe.

a) Discuter suivant les valeurs de α les solutions de (E).
b) On appelle M_1 et M_2 les images des racines dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé usuel. Déterminer α pour que la distance M_1M_2 soit égale à 2.

17 On désigne par α un nombre réel tel que $-\pi < \alpha < \pi$.

1) Démontrer l'égalité $\sin^2\alpha - 2(1+\cos\alpha) = -4\cos^4\dfrac{\alpha}{2}$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :
$z^2 - 2z\sin\alpha + 2(1+\cos\alpha) = 0$.
3) Calculer en fonction de α le module et un argument de chacune des solutions de cette équation.

18 Soit θ un réel de l'intervalle $]0; \pi[$. On désigne par M_1 et M_2 les points dont les affixes sont les solutions de l'équation :
$2z^2(1-\cos 2\theta) - 2z\sin 2\theta + 1 = 0$.
Déterminer θ pour que le triangle OM_1M_2 soit équilatéral.

19 Soit θ un réel de l'intervalle $[0; 2\pi[$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :
$z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)z + 2^{2\theta} = 0$.
Donner chaque solution sous forme trigonométrique.
2) Dans le plan complexe orienté on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente. Déterminer θ pour que OAB soit un triangle équilatéral.

20 Soit θ un réel de l'intervalle $]-\pi; \pi[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^2 - 2(1+\cos\theta)z + 2(1+\cos\theta) = 0$. Donner la forme trigonométrique de chacune des solutions, quand cela est possible.

21 Soit θ un réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z : $z^2 - 2\sin\theta z + \tan^2\theta = 0$. Donner la forme trigonométrique de chacune des solutions, quand elles sont distinctes.

22 Soient a et b deux nombres réels tels que $a \neq 0$ et $|b| < 2|a|$.

a) Montrer que l'équation $az^2 + bz + a = 0$ possède deux solutions conjuguées.
b) Calculer le module de ces solutions.
c) Calculer le cosinus de l'argument des ces solutions.

23 Dans le plan complexe, on considère les points A et C dont les affixes sont les solutions de l'équation :
$z^2 - (3+4i)z - 1 + 7i = 0$.
Déterminer les points B et D tels que $ABCD$ soit un carré de diagonale $[AC]$.

24 Dans le plan complexe, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = -2 + 2\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $c = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $d = -2 - 2\mathrm{i}\sqrt{3}$.

1) Construire les points A, B, C, D.
2) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle.
3) Calculer $\dfrac{d-b}{a-b}$ et $\dfrac{d-c}{a-c}$. En déduire la nature des triangles ACD et ABD.
4) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

25 Soit l'équation $(E)\colon z^4 = 8(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1) Déterminer la forme trigonométrique des solutions de (E).
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.
3) Soit $a = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Calculer a^4 et en déduire les solutions de (E) sous forme algébrique.
4) A partir des questions précédentes déterminer, les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{11\pi}{12}$.

26 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1) $z^6 + 1 + \mathrm{i} = 0$
2) $(2z-1)^4 = z^4$
3) $\overline{z} = z^3$ (on pourra utiliser la forme exponentielle)
4) $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$

27 On considère le nombre complexe $j = \frac{-1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1) Écrire en fonction de j les solutions de l'équation $z^3 = 27$.
2) Résoudre le système d'équations d'inconnue $(u, v) \in \mathbb{C}^2$:
$$\begin{cases} u^2v + uv^2 = 6 \\ u^3 + v^3 = 9 \end{cases}$$

28 On considère le nombre complexe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$. On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$.

1) Démontrer que S et T sont conjugués.
2) Démontrer que $\sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) > 0$. En déduire que la partie imaginaire de S est positive.
3) Calculer $S + T$ et ST.
4) En déduire S et T.

29 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x \sin 2x$.

1) À l'aide des formules d'Euler, démontrer que : $f(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)$.
2) En déduire la primitive F de f telle que $F(\frac{\pi}{6}) = 0$.
3) Pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, calculer les primitives des fonctions $f\colon x \longmapsto \cos px \cos qx$, $g\colon x \longmapsto \sin px \sin qx$ et $h\colon x \longmapsto \cos px \sin qx$

30 Les questions sont indépendantes.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos x - \sin x = -1$.
2) En utilisant la formule de Moivre, exprimer $\sin 2x$ et $\sin 3x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ et résoudre l'équation $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.
3) Linéariser les expressions $\cos^4 a$, $\sin^4 a$, $\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)$ et $\sin^3 x \cos^2 x$.
4) Soit $z = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}$ avec $\theta \in \,]-\pi; \pi[$. Exprimer z en fonction de $\dfrac{\theta}{2}$. Préciser $|z|$ et $\arg(z)$.
5) Donner la forme exponentielle de l'expression $z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}}{1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+y)}}$ en précisant pour quelles valeurs des réels x et y, elle a un sens.
6) Calculer $\mathfrak{Re}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1}\right)$ et $\mathfrak{Re}\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1}\right)$
7) Démontrer que $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1 + \mathrm{i}\tan\theta}{1 - \mathrm{i}\tan\theta}$ pour $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
8) Pour tout entier naturel n, simplifier les expressions suivantes : $a = \dfrac{(1+\mathrm{i})^n - (1-\mathrm{i})^n}{\mathrm{i}}$ et $b = \dfrac{(1-\mathrm{i})^n - \sqrt{2}^n}{(1+\mathrm{i})^n - \sqrt{2}^n}$
9) Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module r. Montrer que $\dfrac{u+v}{u-v}$ est imaginaire pur.
10) On pose $S = \cos p + \cos q$ et $S' = \sin p + \sin q$.
    a) Démontrer que $S + iS' = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{p+q}{2}}\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.
    b) En déduire des expressions de S et S' sous forme de produits.
    c) Procéder de même avec $T = \cos p - \cos q$ et $T' = \sin p - \sin q$.

31 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe $-4+2\mathrm{i}$, B le point d'affixe $2-3\mathrm{i}$. Soit le nombre complexe $Z = \dfrac{z+4-2\mathrm{i}}{z-2+3\mathrm{i}}$. Dans chaque cas déterminer l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition indiquée.

1) $|Z| = 1$; 2) $|Z| = 2$; 3) $Z = z$
4) $Z \in \mathbb{R}$; 5) $Z \in \mathrm{i}\mathbb{R}$; 6) $\arg(Z) \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$
7) $Z \in \mathbb{R}^-$.

32 On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $\alpha = \omega + \omega^4$ et $\beta = \omega^2 + \omega^3$.

1) Démontrer que $\overline{\omega} = \omega^4$, $\overline{\omega^2} = \omega^3$ et $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4 = 0$.

2) En déduire que $\alpha + \beta = -1$ et $\alpha\beta = -1$.

3) Déterminer une équation du second degré dont les racines sont α et β. En déduire que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

33 Les questions sont indépendantes.

1) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que les points d'affixes respectives z, iz et z^2 soient alignés.

2) Déterminer les points $M(z)$ du plan tels que $\left(\frac{z}{z-1}\right)^4 \in \mathbb{R}$.

PREMIERS EXERCICES:

1. Calculs dans ℂ : Ecrire les nombres complexes suivant sous la forme $a + ib$ où a et b sont des réels :

$z_1 = i^3$; $z_2 = i^4$; $z_3 = (3 + 2i)(5 + 4i)$; $z_4 = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $z_5 = (1 + i)^3$;

$z_6 = \frac{1-i}{1+i}$; $z_7 = \frac{1+2i}{3-i}$; $z_8 = z_5 \times z_6$; $z_9 = \frac{z_3}{z_5}$; $z_{10} = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + i^6$.

2. Résolution d'équations dans ℂ : Résoudre les équations suivantes dans l'ensemble des nombres complexes :

a) $z^2 - z + 1 = 0$; b) $2z^2 + 3z + 2 = 0$; c) $z^3 - 1 = 0$; d) $(z^2 - 2z)^2 - 4 = 0$;
e) $z^4 + z^2 - 6 = 0$; f) $z^4 = 1$; g) $z^6 = 1$; h) $z^3 + 1 = 0$.

3. Module et argument : Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z_2 = 1 + i$; $z_3 = i$; $z_4 = -1 + i$; $z_5 = \sqrt{3}+i$; $z_6 = 3-i\sqrt{3}$; $z_7 = (\sqrt{3}+i)(1 - i)$;

$z_8 = z_3 \times z_2$; $z_9 = (1 + i)^8$; $z_{10} = z_1 \times z_5$; $z_{11} = \frac{z_2}{z_4}$; $z_{12} = \frac{z_6}{z_5}$.

4. Forme trigonométrique : Donner la forme trigonométrique des nombres complexes de la question 3.

5. Forme exponentielle complexe : Donner la forme exponentielle des nombres complexes de la question 3.

6. Représentation graphique : Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$), placer les points M_1, M_2 , … , M_{12} images des nombres complexes de la question 3.
Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants:

$z_1 = 1 + i$; $z_2 = 3 + i\sqrt{3}$; $z_3 = \frac{1+i}{1-i}$; $z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$; $z_5 = \left(\frac{i}{1-i}\right)^5$; $z_6 = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{3}}$;

EXERCICE 1 : On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) , et on considère les points A, B et C distincts situés sur le cercle de centre O et de rayon r . Les points A', B' et C' sont les images de A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Les points U, V et W sont les milieux des segments [A'B], [B'C], [C'A] ; montrer que le triangle UVW est équilatéral.

EXERCICE 2: Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) , et on considère l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z) = \frac{z+i\bar{z}}{2}$.

1. Montrer que l'ensemble (d) des points M dont l'affixe z vérifie $f(z) = z$ est une droite.
2. Montrer que le nombre $\frac{f(z)-z}{1-i}$ est réel.
3. En déduire que M' appartient à la droite Δ passant par M et de vecteur directeur $\vec{u}$ - $\vec{v}$.
4. Montrer que pour tout nombre complexe z, $f(f(z)) = f(z)$.
5. Déduire des questions précédentes que M' est le point d'intersection des deux droites (d) et Δ .
6. Caractériser géométriquement l'application f .

EXERCICE 3 : On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On désigne par A le point d'affixe 1 et par C le cercle de centre A et de rayon 1.

PARTIE A : Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_B = 1+e^{i\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $z_E = 1+z_B^{\,2}$.
Montrer que le point B appartient au cercle C.
Déterminer une mesure en radians de l'angle ($\overrightarrow{AF}$; $\overrightarrow{AB}$). Placer le point B.
Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $z_B - z_A$ et $z_E - z_A$. En déduire que les points A, B et E sont alignés. Placer le point E.

PARTIE B : Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.
Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner, à l'aide des points A, M et M' une interprétation géométrique d'un argument du

nombre complexe $\frac{z'-1}{z-1}$. En déduire que les points A, M et M' sont alignés si et seulement si $\frac{z^2}{z-1}$ est un réel.

EXERCICE 4 : On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) , et l'application f du plan complexe dans lui-même qui au point M d'affixe *z* associe le point M' d'affixe $z' = z^3 - 3z^2 + 3z$. On considère les points B et C d'affixe respectives *i* et $i\sqrt{3}$. Calculer les affixes des points images de O, B et C par *f* . Placer les points B et C et leur image B' et C' . L'application f conserve-t-elle l'alignement ?
Montrer qu'un point M d'affixe *z* est invariant par f si et seulement si *z* vérifie l'équation : $z^3 - 3z^2 + 2z = 0$. En déduire que f possède trois points invariants dont on déterminera les affixes.
Montrer pour tout *z* de $\mathbb{C}$ l'égalité : $z' - 1 = (z - 1)^3$.
Soit *z* un nombre complexe différent de 1, on note *r* le module de *z* – 1 et α un argument de *z* – 1 . Exprimer le module *r'* et un argument α' de *z'* – 1 en fonction de *r* et de α.
Soit A le point d'affixe 1, déduire des résultats précédents une relation entre la distance AM' et la distance AM, et une relation entre une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'})$ et une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM})$.
Montrer que si le point M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, alors M' appartient au cercle Γ' de même centre dont on déterminera le rayon.
Montrer que si M appartient à la demi-droite ouverte (d) d'origine A passant par le point B, alors le point M' appartient à une demi-droite (d') que l'on déterminera.
Justifier l'appartenance du point B' à Γ' et à (d').
Compléter la figure avec les différents éléments Γ, Γ', (d) et (d').

EXERCICE 5 : On considère le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) . On considère le point M d'affixe *z*, le point M_1 d'affixe $\overline{z}$, le point A d'affixe 2 et le point B d'affixe 1. Soit f l'application de P privé de A dans P , qui à tout point M d'affixe *z* associe le point M' d'affixe *z'* tel que $z' = \frac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}$.
Déterminer les points invariants par f.
Soit C le point d'affixe $2(1 + i\sqrt{3})$. Montrer que C' est le milieu du segment [OC].
Calculer pour tout $z \neq 2$, le produit $(\overline{z}-2)(z'-1)$.
En déduire : la valeur du produit $AM_1 \times BM'$; une expression de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM'})$ en fonction de $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM_1})$.
Justifier les relations : $AM \times BM' = 6$; $(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM'}) = (\vec{u}\,;\overrightarrow{AM})$.
Application : construire l'image D' du point D d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

EXERCICE 6 : On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique : 4 cm). Soit A le point d'affixe $z_A = -i$ et B le point d'affixe $z_B = -2i$. On considère le point M_1 d'affixe $\overline{z}$, le point A d'affixe 2 et le point B d'affixe 1. Soit f l'application qui, à tout point M d'affixe *z* , M distinct de A, associe le point M' d'affixe *z'* défini par $z' = \frac{iz-2}{z+i}$.
Démontrer que, si *z* est imaginaire pur, $z \neq -i$, alors *z'* est imaginaire pur.
Déterminer les points invariants par l'application f.
Calculer $|z'-i| \times |z+i|$.
Montrer que, quand le point M décrit le cercle de centre A et de rayon 2, le point M' reste sur un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
Développer $(z + i)^2$ puis factoriser $z^2 + 2iz - 2$.
Déterminer et représenter l'ensemble des points M tels que M' soit le symétrique de M par rapport à O.
Déterminer et représenter l'ensemble E des points M tels que le module de *z'* soit égal à 1.
(On pourra remarquer que $z' = \frac{i(z-z_B)}{z-z_A}$).

EXERCICE 7 : Soit le nombre complexe *u* = 1 + *i*. Ecrire *u* et $\overline{u}$ sous forme exponentielle.
Soit *n* un entier naturel. On pose $S_n = u^n + \overline{u}^n$. Donner une écriture de S_n à l'aide d'une exponentielle. En déduire que $S_n = \lambda_n \cos(n\frac{\pi}{4})$ où λ_n est un réel à préciser en fonction de *n*. Pour quelles valeurs de *n* a-t-on $S_n = 0$?
Prouver que si *n* est pair, S_n est un entier relatif.

EXERCICE 8 : On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout θ appartenant à [0 ;2π [, le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$. On désigne par P le point d'affixe 1 + *z* et par Q le point d'affixe z^2.
1. A partir du point M, donner une construction géométrique de P et Q.
2. Placer les points O, A, M, P et Q sur une même figure.
3. Déterminer l'ensemble des points P pour θ appartenant à [0 ;2π [.
4. Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$, *z* étant toujours l'affixe du point M. a) Construire S en justifiant la construction.
b) Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît sur le point M ?
c) Démontrer que le nombre $\frac{1+z+z^2}{z}$ est réel quel que soit θ appartenant à [0 ;2π [.
d) Conclure sur la conjecture précédente.

EXERCICE 9 : Soit A le point d'affixe *i* ; à tout point M d'affixe *z*, distinct de A, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz}{z-i}$. Déterminer l'ensemble C des points M, distincts de A, pour lesquels *z'* est réel.
On suppose que M appartient au cercle C'de centre A et de rayon 1. Montrer que M' appartient à C'.

EXERCICE 10 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).
1. Résoudre dans **C** l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$. On pose $a = \sqrt{3} + i$ et $b = \sqrt{3} - i$. Ecrire *a* et *b* sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives *a* et *b*.

2.a. Soit r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Ecrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{-3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle OA'B' et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

a. Justifier les égalités suivantes : $c\bar{c}=R^2$; $(c-2i)(\bar{c}+2i)=R^2$; $(c+\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i)(\bar{c}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i)=R^2$.

b. En déduire que $c-\bar{c}=2i$ puis que $c+\bar{c}=\frac{-4\sqrt{3}}{3}$.

c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

EXERCICE 11 : On donne dans le plan P muni d'un repère orthonormal, les trois points A, B, C de coordonnées : A(1;0) B(3;6) C($2 - 3\sqrt{3}$; $3 + \sqrt{3}$).
1. Soient *a, b, c* les affixes respectives de A, B, C.
Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe : $\frac{c-a}{b-a}$.
2. Interpréter géométriquement ce nombre complexe. En déduire la mesure principale en degrés de l'angle orienté (AB, AC) et la nature du triangle ABC.
3. A tout nombre complexe *z*, *z*1*b*, on associe le nombre complexe Z défini par $Z=\frac{z-c}{z-b}$.
Déterminer géométriquement l'ensemble des points M d'affixe *z* tels que 1Z1 =1.

EXERCICE 12 : Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$) on associe à tout nombre complexe *z* distinct de -*i*, le nombre complexe Z = $\frac{z+2}{-i(z+i)}$.
1. Calculer le nombre complexe Z_0 obtenu pour *z* = *i*; déterminer le module de Z_0 .
2. Dans cette question on pourra poser Z=U+iV et z=x+iy où U,V,x,y sont des réels.
Soit A le point d'affixe -2 et B le point d'affixe -i.
a) Déterminer et représenter l'ensemble (C) des points M d'affixe z tel que Z soit réel.
b) Déterminer et représenter l'ensemble (D) des points M d'affixe z tel que Z soit imaginaire pur.
3. Donner une interprétation géométrique du module de Z.
Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que 1 Z1 =1.

EXERCICE 13 : 1. Résoudre les équations du second degré à l'inconnue complexe x : $x^2 - 8x + 7 = 0$ de racines x_1 et x_2 ; $x^2 - 8x + 25 = 0$ de racines z_1 et z_2.
2. Dans le plan complexe on appelle A_1 et A_2 les points d'affixes x_1 et x_2 ; B_1 et B_2 les points d'affixes z_1 et z_2 .
a) Placer ces quatre points. b) Montrer que le quadrilatère A_1A_2 B_1B_2 est un carré.

EXERCICE 14 : Soit z un nombre complexe; on lui associe les nombres complexes Z et Z' définis par: $Z = z - i$ et $Z' = z - 1$.
On appelle respectivement m, M et M' les images de z, Z et Z' dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique : 2 cm).
1. Dans cette question: $z = \frac{3+i}{4}$.
a) Calculer Z et Z'.
b) Calculer les modules 1Z' - z1 et 1Z' - Z1.
c) Représenter les points m, M et M'. Montrer que le triangle mMM' est isocèle.
2. On pose $z = x + iy$ où $x$et y sont des nombres réels.
a) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du produit ZZ'.
b) Déterminer et représenter l'ensemble E des points m du plan complexe tels que ZZ' soit un nombre réel.

EXERCICE 15 : Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormal direct (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$) (unité graphique 1 cm).
On considère la suite de points M_n du plan P d'affixes respectives non nulles z_n définies par:
$z_0 = 8$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} z_n$.
1. Calculer le module et un argument du nombre complexe $\frac{3+i\sqrt{3}}{4}$ L'écrire sous forme trigonométrique.
2. Calculer z_1, z_2, z_3 et vérifier que z_3 est imaginaire pur. Placer dans le plan P les points M_0, M_1, M_2, M_3.
3. Pour tout entier naturel n, calculer le rapport $\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}$, en déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $|z_{n+1} - z_n| = \frac{\sqrt{3}}{3}|z_{n+1}|$.

EXERCICE 16 : A. On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par
$P(z) = z^3 + (3 - \sqrt{3})z^2 + (6 - 2\sqrt{3})z + 4 - 4\sqrt{3}$.
1. Vérifier que $P(\sqrt{3} - 1) = 0$.
2. Résoudre l'équation $P(z) = 0$.
3. Ecrire les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.

B. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O; u, v); on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} - 1$, $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$
1. Placer les trois points A, B, C.
2. Calculer les longueurs AB, AC et l'angle (BAC) et en déduire la nature du triangle ABC.
3. Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_B}$ puis arg $\left(\frac{z_B - z_A}{z_B}\right)$. En déduire les valeurs exactes de cos $\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et sin $\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

EXERCICE 17 : On considère le triangle ABC rectangle isocèle en C tel que ; M est un point quelconque du plan, M_1 et M_2 sont les milieux respectifs de [AM] et [BM]. Le but de l'exercice est de trouver l'ensemble des points M du plan tels que le triangle CM_1M_2 est équilatéral. Pour cela, on choisira un repère orthonormé à préciser.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $CM_1 = CM_2$.
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $CM_1 = M_1M_2$.
3. En déduire l'ensemble des points M du plan tels que le triangle CM_1M_2 est équilatéral.

EXERCICE 18 : PARTIE A : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) . On considère un triangle MNP équilatéral et R son centre. Les points M, N, P et R ont pour affixe z_M , z_N , z_P , z_R .
Déterminer z_R en fonction de z_M , z_N , z_P . Déterminer l'aire du triangle équilatéral en fonction de z_M et z_N .
PARTIE B : Le triangle ABC est un triangle équilatéral direct de côté 1. Le point D est sur le segment [BC]. On construit les triangles équilatéraux BDE et CDF extérieurs à ABC. Les points I, J, K sont les centres de gravité respectivement des triangles ABC, BDE et CDF. Le but de l'exercice est de montrer que le triangle IJK est équilatéral.
Pour cela, on choisira un repère orthonormé à préciser.

Dans ce repère, déterminer l’affixe des points A, B, C, E, F, I, J, K.
Montrer que $z_K - z_I = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_J - z_I)$.
En déduire que le triangle IJK est équilatéral.
Déterminer l’aire du triangle IJK en fonction de x (Ecrire l’expression le plus simplement possible).
Préciser l’aire maximale et l’aire minimale et pour quelle valeur elles sont atteintes.

EXERCICE 19 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) . On considère les triangles ABC et ADE rectangles isocèles en A et tel que $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}) = \frac{\pi}{2}$ [2π] .
Démontrer que les droites (BD) et (CE) sont perpendiculaires et que BD = CE par deux méthodes :
1) Grâce à une méthode géométrique ;
2) A l’aide des nombres complexes.

EXERCICE 20 : ABC est un triangle, O le centre du cercle circonscrit, et H le point défini par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
Le but de l’exercice est de démontrer que H est l’orthocentre du triangle ABC par deux méthodes :

- Grâce à une méthode géométrique : on pourra utiliser les points D, E et F définis par $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.
- A l’aide des nombres complexes : soient a, b, c, h les affixes des points A, B, C, H ; montrer que $w = \bar{b}c - b\bar{c}$ est imaginaire pur ; montrer que $(b+c)(\bar{b}-\bar{c})$ et $\frac{b+c}{b-c}$ sont imaginaires purs.

Exprimer en fonction de a, b, c, h les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$. Conclure.
Soit G le centre de gravité du triangle ABC, d’affixe g. Montrer que les points O, H et G sont alignés.

EXERCICE 21 : Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$) . On considère la suite de points M_n du plan d’affixes respectives non nulles z_n définies par $z_0 = 8$ et pour tout entier naturel n,
$z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{4} z_n$. Ecrire $\frac{1+i\sqrt{3}}{4}$ sous forme exponentielle complexe.
Calculer z_1, z_2, z_3 et vérifier que z_3 est réel. Placer les points M_0, M_1, M_2, M_3 .
Pour tout entier naturel n, calculer le rapport $\frac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}}$.
En déduire que le triangle OM_nM_{n+1} est rectangle et que $M_nM_{n+1} = \sqrt{3}\, OM_{n+1}$.
On pose $r_n = |z_n|$. Montrer que la suite (r_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
Ecrire r_n en fonction de n. En déduire la longueur M_nM_{n+1} en fonction de n.
On considère la longueur L_n de la ligne brisée formée par les points M_0, M_1, M_2, M_3 , … , M_n .
On a alors $L_n = \sum_{k=0}^{k=n} M_k M_{k+1}$. Calculer L_n en fonction de n. Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.

NOMBRES COMPLEXES
exercices d'application

Définition de l'ensemble $\mathbb{C}$

1) Donner les parties réelles, imaginaires et le conjugué des nombres complexes $z_1 = -2 + 3i$, $z_2 = -i\sqrt{3} + \frac{5}{2}$, $z_3 = 4$, $z_4 = -\frac{i}{8}$, $z_5 = 0$.
2) Soit $z = (2a - b) + i(b - 1)$. A quelle condition z est-il :
   a) réel ?
   b) imaginaire pur ?
   c) nul ?

Opérations dans $\mathbb{C}$

1) Soit $z = 2 - 3i$ et $z' = 5 + i$. Calculer $z + z'$, $-z$, $z - z'$, zz' et $2z - iz'$.
2) Écrire sous forme algébrique les nombres complexes : $z_1 = \frac{1}{2-3i}$, $z_2 = \frac{1}{i}$, $z_3 = \frac{2+i}{-3+i}$ et $z_4 = \frac{1+i}{1-i}$.
3) Calculer i^3, i^4, i^{4n}, i^{4n+1}, i^{4n+2}, i^{4n+3}, i^{81}, i^{2019} avec $n \in \mathbb{N}$.

Propriétés de calcul

1) Calculer $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, $(5-i)^3$ et $(4-i)^2 - (1+2i)(1-i)$.
2) Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, démontrer l'identité remarquable $(z + iz')(z - iz') = z^2 + z'^2$
3) Calculer $(x + iy)^2 \times \frac{1-i}{2x + iy + 1}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$
   a) $(3 + 5i)z = 2i - z$
   b) $(iz + 1)(z - 1 + 5i) = 0$
   c) $\frac{iz}{z - 2i} = 3$
5) Résoudre le système d'équations d'inconnue $(u, v) \in \mathbb{C}^2$: $\begin{cases} u - v' = i \\ iu + v = 1 \end{cases}$
6) Calculer $z = 1 + i + i^2 + \cdots + i^{2018}$.
7) a) Écrire sous forme algébrique les nombres complexes $(1 + i)^2$, $(1 + i)^3$, $(1 + i)^4$, $(1 + i)^8$.
   b) En déduire $z = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^7$.

Conjugué et module

1) Calculer le module des nombres complexes $3 + 4i$, $1 - i$, $-5 - 2i$, -6, $9i$, $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$ et $\frac{-\sqrt{2}\,(1 + 2i)^4}{4i\,(2 - i)^5}$.
2) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$, exprimer le conjugué de $a = \frac{3iz^2 + 5 - 2i}{2z + 4}$ et b=$\frac{z(1 - i\bar{z})}{2z - 4i\bar{z}}$ en fonction de z et $\bar{z}$?
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$
   a) $(7 - 3i)\overline{z} - 2 + i = 0$
   b) $(3 + 2i)z + (1 - i)\overline{z} = 1$
   c) $|z|^2 + 3(z - \overline{z}) = 13 + 18i$
4) Soit z un nombre complexe. Parmi les nombres suivants lesquels sont réels ? Imaginaires purs ? $a = 1 - z\bar{z}$; $b = iz\,(i\bar{z})^2$; $c = (z - i\bar{z})\,(z + i\bar{z})$; $d = z - \bar{z}$.
5) Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Démontrer les identités remarquables :

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\Re(z_1 z_2) + |z_2|^2$$
$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\Re(z_1 z_2) + |z_2|^2$$

6) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|1 + iz| = |1 - iz|$, montrer que $z \in \mathbb{R}$.
7) a) Soit z un nombre complexe de module 1. Montrer que $\overline{z} = \frac{1}{z}$.
   b) Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| = |b| = 1$ et $a \neq b$. On pose $c = \frac{a + b}{a - b}$. Montrer que $c \in i\mathbb{R}$.

Racines carrées d'un nombre complexe

Trouver les racines carrées des nombres complexes $3 - 4i$, i, 5 et -9.

Équations du second degré

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1 + 5i)z - 2(1 - i) = 0$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + z + 1 = 0$.
3) Trouver les paires de nombres complexes dont la somme vaut i et le produit 1.
4) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = 0$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$. On discutera suivant les valeurs de θ, le nombre de solutions distinctes.

Polynômes à coefficients complexes

1) Soit le polynôme $P(z) = z^3 + (-2-3i)z^2 + 3(1+2i)z - 9i$.
   a) Montrer que $P(z)$ possède une racine imaginaire pure.
   b) Factoriser $P(z)$ et résoudre l'équation $P(z) = 0$.
2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
   $4iz^3 + 2(1+3i)z^2 - (5+4i)z + 3(1-7i) = 0$,
   sachant qu'elle admet une racine réelle.
3) Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ où $a_0, \ldots, a_n$ sont des nombres réels. Montrer que si z est racine de P alors $\overline{z}$ l'est aussi.

Interprétation géométrique des nombres complexes

1) Le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On considère les points $A(a = 4+2i)$, $B(b = -2+2i)$ et $C(c = -2-4i)$.
   a) Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ABC.
   b) Déterminer l'affixe d du point D tel que le quadrilatère $ADBC$ soit un parallélogramme.
   c) Calculer $\dfrac{d}{c}$. En déduire que les points O, C et D sont alignés.
   d) Donner la forme algébrique du quotient $q = \dfrac{c-b}{a-b}$. Donner une interprétation géométrique du module de q. Que peut-on en déduire ?
   e) Quelle est la nature du triangle ABC ?
2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ on considère les trois points A, B, C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3} + i$, $z_B = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ et $z_C = 1 + 3i$.
   a) Démontrer que les points A, B et C sont tous trois sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.
   b) Construire les points A, B et C en expliquant la démarche.

Ensembles de points : méthode algébrique

Pour tout nombre complexe $z \neq 1 + i$, on considère le complexe $z' = \dfrac{z-2+i}{z-1-i}$.

1) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.
2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est réel.
3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est imaginaire pur.
4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
5) Retrouver les résultats des questions 2), 3) et 4) en utilisant les propriétés du module et de l'argument d'un nombre complexe.

Ensembles de points et module

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que $|z-2| = |z+i|$.
2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que $|\bar{z} + 3i| = 2$.
3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telles que $|(1+i)z - 2| = 3\sqrt{2}$.
4) On considère les points $A(2i)$, $B(-1-i)$, $G_1 = \text{bar}\{(A,1);(B,-2)\}$ et $G_2 = \text{bar}\{(A,1);(B,2)\}$. À tout point $M(z)$ distinct de B, on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \dfrac{z-2i}{z+1+i}$.
   a) Déterminer les affixes des points G_1 et G_2.
   b) Exprimer OM' en fonction de MA et MB.
   c) Déterminer et construire l'ensemble $(\mathscr{E})$ des points $M(z)$ du plan tels que $OM' = 1$.

Argument d'un nombre complexe

1) Écrire sous forme trigonométrique $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -5$ et $z_4 = 2i$.
2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n le nombre complexe $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$ appartient-il à $\mathbb{R}^+$? Pour quelles valeurs de n est-il imaginaire pur ?
3) Écrire sous forme exponentielle $u_1 = 1 - i$ et $u_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$.
4) Soit $z = 3\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z' = 5\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, calculer zz', $\bar{z}^3$ et $\dfrac{z}{z'}$.
5) Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 3 + i\sqrt{3}$. En utilisant les écritures exponentielles de z_1 et z_2, déterminer la forme algébrique de $z_1 z_2$, z_2^4 et $\dfrac{z_2}{z_1}$.
6) Donner la forme algébrique du nombre complexe $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.
7) Donner la forme exponentielle du nombre complexe $-3\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Formule de Moivre

Exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Formules d'Euler

1) Linéariser $\sin^3\theta$, $\sin^4\theta\cos\theta$ et $\sin\theta\cos^2\theta$.
2) Linéariser $\cos^4 x$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \cos^4 x$.

Transformation de $a\cos x + b\sin x$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$.

Angles et configurations dans le plan complexe

On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 2$.

1) Donner la forme trigonométrique du complexe $q = \dfrac{b-a}{c-a}$.
2) Interpréter géométriquement le module et un argument de q.
3) En déduire la nature du triangle ABC.

Ensembles de points et argument

Pour tous nombre complexe $z \neq 1 + \mathrm{i}$, on considère le complexe $z' = \dfrac{z - 2 + \mathrm{i}}{z - 1 - \mathrm{i}}$.

1) Interpréter géométriquement le module et un argument de z'
2) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est réel.
3) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est imaginaire pur.
4) Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que $z' \in \mathrm{i}\mathbb{R}^-$.

Racines n-ième d'un nombre complexe

1) Calculer les racines cubiques 8i
2) Soit l'équation (E): $z^4 = -7 + 24\mathrm{i}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
   a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = 1$.
   b) Soit $a = 1 - 2\mathrm{i}$. Calculer a^4 et en déduire les solutions de (E).
3) Calculer $\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1}$, où les ω_k sont les racines n-ième de l'unité.
4) Calculer les racines carrées de $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 1
θ désigne un réel appartenant à $[0\ ,\ 2\pi[$.
1°) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z : $z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)z + 2^{2\theta} = 0$. Donner chaque solution sous forme trigonométrique.
2°) Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O , u , v) , on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédente . Déterminer θ de manière à ce qu'OAB soit un triangle équilatéral.

Exercice 2 :
Soit $z_1 = \frac{z^2}{z+1}$ et $z_2 = \frac{1}{z(z+1)}$.
Déterminer z tel que z_1 et z_2 soient tous les deux réels . Dans ce cas , calculer z_1 et z_2

Exercice 3 :
Soit n un entier naturel et θ un réel appartenant à $]0\ ,\ \pi\ [$. On considère les sommes :

$$S_n = \cos^2\theta + \cos^2\theta\cos 2\theta + \ldots\ldots + \cos^p\theta\cos p\theta + \ldots.. + \cos^n\theta\cos n\theta$$

$$S'_n = \cos\theta\sin\theta + \cos^2\theta\sin 2\theta + \ldots\ldots + \cos^p\theta\sin p\theta + \ldots.. + \cos^n\theta\sin n\theta$$

$\Sigma_n = S_n + iS'_n$
1) Montrer que Σ_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe .
2) Déduisez-en la valeur de Σ_n , puis de S_n et S'_n en fonction de n et θ .
3) a) Calculer la somme $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + -\ldots - \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$
avec $n \in IN^*$.
b) Quelle est la limite de $\frac{S_n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$?

Exercice 4 :
Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct (O , u , v) .
1°) Soit M_1 , M_2 , M_3 les points d'affixes z_1 , z_2 , z_3
Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si , et seulement si , $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$
où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (on pourra utiliser une rotation centrée en M_2) .
2°) On considère dans l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) suivante :
$z^3 - (1 + a + ia)z^2 + a(1 + i + ia)z - ia^2 = 0$ où a désigne un paramètre complexe .
a°) Vérifier que 1 est solution de (E) . Calculer les deux autres solutions z' et z" de (E) .
b°) Soit A , B , C les points d'affixes respectives 1 , z' et z" .
Déterminer les deux valeurs complexes de a pour lesquelles le triangle ABC est équilatéral. On exprimera chaque valeur sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

Exercice 5 :
1) Soit $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$. Soit $S = z + z^2 + z^4$ et $T = z^3 + z^5 + z^6$
a) Démontrer que S et T sont conjugués et que la partie imaginaire de S est positive .

b) Calculer S + T , ST , S et T .

2) Pour a et b réels fixés, soit l'équation :
$z^4 - 4(\cos a \cos b)z^3 + 2(1 + \cos 2a + \cos 2b)z^2 - 4(\cos a \cos b)z + 1 = 0$
a) On pose $u = z + 1/z$.
Démontrer que la résolution revient à celle d'un système de deux équations du second degré .
b) Résoudre l'équation dans ℂ . Préciser en fonction de a et b , la forme trigonométrique des solutions . Les représenter dans le plan complexe.

Exercice 6 :

On pose $Q(z) = z^3 - (i + 2i\cos\alpha)z^2 - (1 + \cos\alpha)^2 z + i(1 + \cos^2\alpha)$ où z désigne un nombre complexe , i l'unité imaginaire pure , α un nombre réel tel que $0 \prec \alpha \prec \frac{\pi}{2}$. Les trois racines de Q(z) sont désignés par a , b et c respectivement . On veut déterminer les racines de Q(z) de deux façons différentes.

1ère façon

1°) Sans calculer a , b et c , calculer (a + b + c) , (ab + ac + bc) et abc .
2°) Sachant que la somme de deux de ces racines est égale à (2i cos α) , utiliser les résultats précédents pour résoudre l'équation Q(z) = 0 .

2ème façon

3°) Montrer que Q(z) a une racine imaginaire pure que l'on déterminera.
4°) En déduire les autres racines de Q(z) .
5°) a étant la racine de Q(z) dont la partie réelle est positive, donner son module en fonction de α et déterminer le sinus et le cosinus de son argument en fonction de α .

Exercice 7 :
Soit n un entier naturel non nul et soit q un nombre réel différent de 0 , -1 et 1 .
On considère dans le plan complexe les n points A_0 , A_1 , ………., A_{n-1} d'affixes respectives z_0 , z_1 ,……………, z_{n-1} .
1°) Démontrer que le système de n points pondérés $\left\{\left(A_k, q^k\right), 0 \le k \le n-1\right\}$ admet un barycentre G_n .
2°) On choisit les nombres complexes z_k de la façon suivante :
$z_0 = 1$, $z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ et $z_k = (z_1)^k$ pour $1 \le k \le n-1$.
a°) Déterminer l'affixe z_n de G_n à l'aide de q et de z_1 .
b°) Préciser la partie réelle x_n et la partie imaginaire y_n de z_n .
3°) a°) Déterminer n pour que z_n soit un nombre réel .
b°) Calculer les limites de x_n et de y_n lorsque n tend vers +∝ .
En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers +∝ .

Exercice 8 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé (O , u , v) de sens direct .
Soit M d'affixe z et M' d'affixe z' . Démontrer :
1°) $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si , et seulement si , $\bar{z}z'$ est imaginaire pur .
2°) O , M , M' sont alignés si , et seulement si , $\bar{z}z'$ est réel .
3°) Une mesure de $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})$ est π/2 si , et seulement si , z' = λzi , λ∈IR*+

Exercice 9 :

Soient α et β deux nombres complexes quelconques. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et pour tout complexe z :

$$f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z.$$

1) Montrer que $f(1) + f(j) + f(j^2) = 3$. (On rappelle que : $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$).

a) En déduire que $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$.

b) En utilisant a), montrer que l'un au moins réels $|f(1)|$, $|f(j)|$ et $|f(j^2)|$ est supérieur ou égal à 1.

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u},\vec{v})$. ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité O et tel que l'affixe de A soit un réel r strictement positif fixé. I et J sont deux points quelconques du plan d'affixes respectives a et b.

Dans cette question on prend $\alpha = -(\frac{a+b}{r})$ et $\beta = \frac{ab}{r^2}$.

a) Montrer que les affixes de B et C sont rj et rj^2.
b) Montrer que $BO \cdot BI \cdot BJ = r^3|f(j)|$.
Calculer de la même façon $CO \cdot CI \cdot CJ$ et $AO \cdot AI \cdot AJ$.
c) Montrer le triangle ABC a au moins un sommet S vérifiant : $SO \cdot SI \cdot SJ \geq r^3$.

Exercice 10 :

Pour tout entier naturel k, on pose $z_k = \frac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i}$
et on note $|z_k| = \rho_k$ et $\arg z_k = \alpha_k$ où $\alpha_k \in]-\pi,\pi]$.

Partie I :

1) Montrer que pour tout $k > 0$, $\rho_k = 1$ et $tan\frac{\alpha_k}{2} = \frac{1}{1+k(k+1)}$.
2) Placer dans le plan complexe les points d'affixes z_0, z_1 et z_2.
3) a) Démontrer que pour tout entier $k \geq 0$, il existe un unique réel θ_k de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, tel que $tan\,\theta_k = k$. Calculer θ_0 et θ_1.
b) Sans calculer θ_2 et θ_3, construire sur le cercle trigonométrique les points images de $e^{i\theta_2}$ et $e^{i\theta_3}$ en précisant le procédé de construction utilisé.
c) Démontrer que pour tout entier $k \geq 0$: $\frac{\alpha_k}{2} = \theta_{k+1} - \theta_k$.

Partie II :

On pose : $S_1 = z_1$, $S_2 = z_1 \cdot z_2$, $S_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ et pour tout entier $n \geq 4$, $S_n = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdots z_n$.

1) Quel est le module de S_n ?
Exprimer l'argument de S_n en fonction de θ_{n+1} et θ_1.

2) Par définition une suite de nombres complexes $\left(r_n e^{i\varphi_n}\right)$ converge vers le nombre complexe $re^{i\varphi}$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = \varphi$.
Montrer que la suite (S_n) converge et calculer sa limite.

Exercice 11

On considère la suite (z_n) de nombres complexes telle que $z_0 = 0$, $z_1 = i$ et pour tout entier $n \geq 2$:

$$z_n - z_{n-1} = i(z_{n-1} - z_{n-2}) \qquad (1).$$

1) a) On pose $v_n = z_n - z_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. Exprimer v_n en fonction de n.
b) En déduire que $z_n = \frac{1-i}{2}(i^n - 1)$.
c) Démontrer que la suite (z_n) est périodique.
2) On note M_n l'image dans le plan complexe du nombre complexe z_n.
a) Marquer les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
b) Que peut-on dire des points M_{100}, M_{101}, M_{102} et M_{103} ?
c) Interpréter en module et argument la relation (1) pour déterminer la nature du quadrilatère $M_nM_{n+1}M_{n+2}M_{n+3}$.

Exercice 12

Θ est réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$ et n un entier naturel. Donner le module et un argument de $\left(\frac{1+\cos\theta - i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta}\right)^n$

Exercice 13

Le but de l'exercice est de montrer, à l'aide des nombres complexes, qu'un triangle dans lequel le centre O du cercle circonscrit est aussi isobarycentre est un triangle équilatéral.

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{U}, \vec{V})$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
1)a) Mettre ω et ω² sous forme algébrique.
b) Montrer que $1 + \omega + \omega^2 = 0$ et que $\omega^2 = \overline{\omega}$.
2) On cherche les nombres complexes z tels que : $|z| = |1 + z| = 1$ $(*)$.
a) Montrer que ω satisfait aux conditions $(*)$.
b) Montrer que si un nombre complexe $z = x + iy$ vérifie les conditions $(*)$ alors $x = -\frac{1}{2}$.
En déduire que ω et $\overline{\omega}$ sont les seuls complexes satisfaisant aux conditions$(*)$.
3) Soient A, B et C, d'affixes respectives a, b et c, trois points du cercle (Γ) de centre O et de rayon R.
On suppose que O est l'isobarycentre des points A, B et C. On pose $p = \frac{b}{a}$ *et* $q = \frac{c}{a}$.
a) Montrer que $|p| = |q| = 1$ *et que* $1 + p = -q$.
b) Montrer, à l'aide de 2.b) que $p = \omega$ ou $p = \overline{\omega}$.
Dans ce qui suit, on suppose que $p = \omega$.
c) Montrer, à l'aide de 1), que $q = \omega^2$.

d) Montrer que $b - a = (\omega - 1)a$; $c - b = (\omega - 1)b$; $c - a = (\overline{\omega} - 1)a$.
En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 14

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soit les points A et B d'affixes respectives 1 et – 1.
A tout point M d'affixe z du plan, on lui associe le point M' d'affixe z' avec zz'= 1 .
1) a) Construire M et M' lorsque $z = 2(1 + i)$
b) Dans le cas général, montrer que la droite (AB) est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ et que OM.OM'= OA^2.
2) a) Vérifier que pour tout z∈ $\mathbb{C}^*$, on a :

$$\left(\frac{z + z'}{2} - 1\right)\left(\frac{z + z'}{2} + 1\right) = \left(\frac{z - z'}{2}\right)^2$$

b) Soit I le milieu de $[M ; M']$. En utilisant 2.a), montrer que :
IA.IB = IM^2 et que, pour M$\neq A$ et M$\neq B$, la droite (MM') est la bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})$.

Problème

1) a) α est un réel. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E , 1) : $z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$
b) En déduire la forme trigonométrique des solution de l'équation (E , n) : $z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0$, n étant un entier naturel non nul.
2) On pose $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1$ avec n un entier naturel non nul et α un réel. On admet que
$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$.

a) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que : $\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}$
b) Pour tout $\alpha \in]0 ; \pi[$ et pour tout naturel supérieur ou égal à 2, on pose : $H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$.

Montrer que : $2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$

c) Quelle est la limite de : $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?
d) En déduire que ,
pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, on a : $\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \ldots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

EXERCICE 1 :

Donner l'écriture complexe de la transformation f dans chacun des cas suivants :

1) f est la translation de vecteur $\vec{u}\left(1+2i\right)$.
2) f est l'homothétie de centre $I\left(1+i\right)$ et de rapport (-2).
3) f est la rotation de centre $K\left(2-i\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
4) f est la similitude plane directe de centre O, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de rapport $k=2$.
5) f est la similitude plane directe de centre $\Omega\left(2i\right)$, d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et de rapport $k=\frac{1}{2}$.

EXERCICE 2 :

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f définie par son écriture complexe.

1) $z'=z+2-3i$
2) $z'=\frac{3}{5}z+1-\frac{1}{2}i$
3) $z'=\left(1-i\right)z+2-i$
4) $z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$
5) $z'=-2iz+i-2$
6) $z'=\left(1-i\sqrt{3}\right)z+1+2i$
7) $z'=e^{-2i\frac{\pi}{3}}z+5-7i$
8) $z'=iz+2i+1$

EXERCICE 3 :

On donne les points $A\left(1\right)$, $B\left(2i\right)$, $C(-4)$, $D(i)$ et $E(-i)$.

1) Déterminer l'écriture complexe de la similitude S telle que $S(A)=B$ et $S(B)=C$ puis caractériser S .
2) Déterminer l'écriture complexe de la similitude F qui laisse invariant D et transforme A en E .Donner la nature et les éléments caractéristiques de F .

EXERCICE 4 :

Soit $F: M(x,y)\mapsto M'(x',y')$ tel que $\begin{cases} x'=-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+\frac{3}{2} \\ y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y-\frac{3}{2} \end{cases}$.

1) Déterminer l' affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M .En déduire la nature et les éléments caractéristiques de F .
2) Déterminer la similitude G telle que $G(A)=O$ et $G(B)=B$ avec $A\left(1\right)$ et $B\left(-1\right)$.
3) Déterminer $F\circ G$.
4) Donner l'expression analytique de H dont l'écriture complexe est $z'=\left(1-i\right)z+2+i$.

EXERCICE 5 :

On donne les points A, B, C et Ω d'affixes respectives $1+2i$, $-2+i$, $-1-2i$ et $2-i$.

1) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S_1 de centre Ω qui transforme A en B .

2) S_2 est la transformation du plan qui à chaque point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{1}{2}$. Caractériser $S_2 \circ S_1$.

3) Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

   a) Donner l'affixe de D tel que.
   b) Déterminer l'image C' de C par r.

4) Soit $T_2 : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = \alpha^2 z + \beta$ où α et β sont des nombres complexes.Déterminer α et β tels que $S_2 \circ T_2$ soit :

   a) Une translation de vecteur $\vec{u}(1;0)$.
   b) Une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

EXERCICE 6 :

On considère $f : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que : $z' = 4a^2 z + 1 - 2a$ avec $a \in \mathbb{C}^*$

1) Déterminer a tel que f soit une translation.Préciser alors f.
2) Déterminer a tel que f soit une homothétie de rapport -8.
3) Déterminer a tel que f soit une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
4) Déterminer a tel que f soit une similitude plane directe de centre $\Omega(i)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

EXERCICE 7 :

f est l'application du plan P dans lui-même qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = 2(1+i)z - i$.

1) Préciser la nature de f.
2) Déterminer l'affixe de $A' = f(A)$ avec $A(2+i)$.
3) Déterminer une équation cartésienne de l'image par f de la droite $-2x + y = 0$

EXERCICE 8 :

1) Placer les points $A(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i)$, $B(1+3i), A'(1-i)$ et $B'(-3+4i)$ dans le plan.
2) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S telle que $S(A) = A'$ et $S(B) = B'$. Placer son centre Ω.
3) Soit (D) la droite : y = x+1 et (D')= S(D). Construire (D) et (D').
4) Soit (C) le cercle de centre Ω et de rayon $R = \sqrt{2}$. Construire(C).
5) Sans chercher l'équation cartésienne de (C')= S(C), donner le centre et le rayon de (C') puis construire (C').

EXERCICE 9 :

1) Déterminer l'ensemble (C) des points $M(z)$ vérifiant : $\left|\left(1 - i\sqrt{3}\right)z - \sqrt{3} - i\right| = 4$.
2) Déterminer l'écriture complexe de la similitude plane directe S transformant $A(i)$ en O et $B\left(\sqrt{3}\right)$ en $B'(-4i)$. Préciser le centre, le rapport et l'angle de S.
3) En utilisant les résultats établis au 2), retrouver l'ensemble (C) défini au 1).

EXERCICE 10 :

Soit $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ et l'équation $(E) : z^2 - \left[1 + i(\sin\theta + \tan\theta)\right]z + \sin\theta(-\tan\theta + i) = 0$.

1) Montrer que $b = i\sin\theta$ est solution de (E) puis calculer l' autre solution a.

2) Soit T la transformation plane : $M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = az + b$ avec a et b solutions de (E).

   a) Donner la nature de T et préciser ses éléments caractéristiques.

   b) Déterminer θ tel que T soit une similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$. Calculer alors l'affixe du centre Ω et le rapport k de T.

EXERCICE 11 :

1) Soit $(E): z^3 + (1-8i)z^2 - (23+4i)z - 3 + 24i = 0$.

   a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer.

   b) Montrer que $1+2i$ et $-2+3i$ sont solutions de (E).

   c) Donner l'ensemble des solutions de (E).

2) Soit les points A, B et C d'affixes respectives $1+2i$, $3i$, $-2+3i$, et soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2 et 1.

   a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $2i$ et $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et que ces affixes sont, dans cet ordre, en progression géométrique, déterminer la raison de cette suite.

   b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

EXERCICE 12 :

1) a) Montrer que $\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

   b)Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 = 1$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique et sous forme algébrique.

   c)Déduire des questions précédentes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E): $z^3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. On remarquera que (E) est équivalente à $\left(\frac{z}{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\right)^3 = 1$.

2) a) Ecrire $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique.

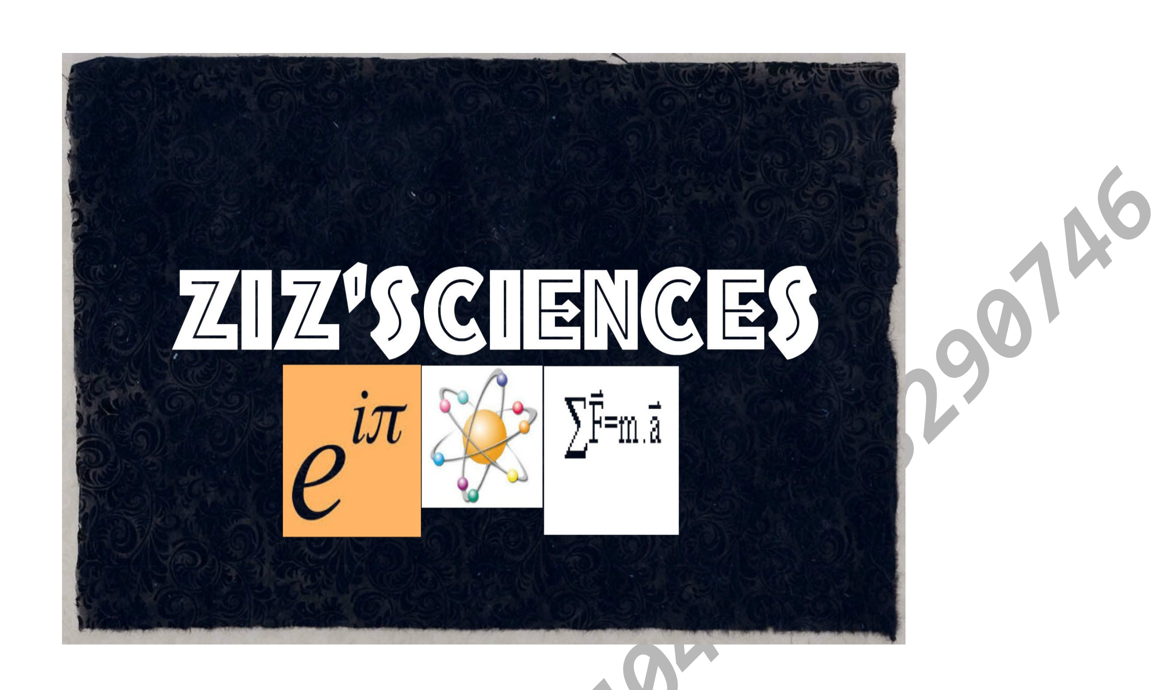
   b)En déduire les arguments des solutions de (E).

3) Déduire de 1c) et 2b) les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

4) F esr la transformation d'écriture complexe : $z' = \sqrt{2}(-1+i)z + (1+\sqrt{2})i + \sqrt{2}$.

   a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de F.

   b) Déterminer l'affixe du point B tel que $B = F(A)$ avec $A(-1)$.



0.2 Nombres Complexes

0.2.1 Séries : 1

Exercice 1

1-) Soit a, b et c trois nombres complexes de modules 1 et tels que $a+b+c=1$.
Calculer $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

2-) Soit u et v deux complexes tel que $|u|=|v|=1$ et $uv \neq -1$.
Montrer que $\frac{u+v}{1+uv}$ est un réel.

3-) Soit a, b , z des nombres complexes. On pose : $Z=\frac{z+ab\bar{z}-(a+b)}{a-b}$
Montrer que si $|a|=|b|=1$ alors Z^2 est un réel négatif ou nul.

4-) Soit $\theta \in]-\pi;\pi[$. Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique puis sous forme exponentielle :

3-) Montrer que : $Z = \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \times \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ est un nombre réel.

4-) Montrer que les points $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ et $M_4(z_4)$ sont cocycliques.

5-) Chercher la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{M_2M_1}, \overrightarrow{M_2M_3})$.

Exercice 5

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E) \quad : \quad (1+iz)^n = (1-iz)^n \quad , n \in \mathbb{N} \quad , n \geq 2$$

1) **a)** Montrer que pour toute solution z de l'équation (E), on a : $|1+iz| = |1-iz|$

b) En déduire que si z de (E) alors z est réel.

2) **a)** Soit z un nombre réel. On pose $z = \tan\varphi$ avec $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exprimer le complexe $\frac{1+iz}{1-iz}$ en fonction de $e^{i\varphi}$.

b) Écrire l'équation (E') portant sur φ traduisant (E)

c) On prend $n = 6$. Résoudre alors et en déduire les solutions de l'équation (E)

Exercice 6

On considère le complexe $z = \cos\frac{2\pi}{7} + i\sin\frac{2\pi}{7}$ qui est une racine 7ième de 1.

1) On pose $S = z + z^2 + z^4$ et $S = z^3 + z^5 + z^6$.

Montrer que et sont conjuguées et que la partie imaginaire de est positive.

2) Calculer $S + T$ et ST puis en déduire S et T.

Exercice 7

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + 2(1-\cos u)z + 2(1-\cos u) = 0$ où u est paramètre réel de l'intervalle $[0; 2\pi[$.

1) Résoudre dans C cette équation .On notera z_1 et z_2 les solutions.

2) Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 .**(Bac C 1992)**

Exercice 8

1) Soit α un nombre réel.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_1) d'inconnue z suivante :

$$(E_1 \quad : \quad z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0$$

b) Donner la forme trigonométrique des solutions de l'équation ,

$$(E_1 \quad : \quad z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0 \quad n \in \mathbb{N}^\star$$

.

2) Soit $P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1$.

1. $Z_1 = \sin\theta + i\cos\theta$ **2.** $Z_2 = 1 + \sin\theta + i\cos\theta$

3. $Z_3 = 1 + \sin\theta - i\cos\theta$ **4.** $Z_4 = \dfrac{(1-i\sqrt{3})(\sin\theta + i\cos\theta)}{\sin\theta + i\cos\theta + i(\sin\theta - i\cos\theta)}$ $\theta \in \mathbb{R}$

5. $Z_5 = \dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$ **6.** $Z_6 = \dfrac{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}{1 + e^{i(\alpha+\beta)}}$

où α et β sont deux réels donnés .

5-) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$; $z_2 = 1 - i$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 2

Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que :

1. $|z+5-2i| = |\bar{z} - 2 + i|$ **2.** $|2iz - 1 + 2i| = 2$ **3.** $\arg(3i - z) = 0[2\pi]$ **4.** $\arg(\bar{z} - 3 + i) = \dfrac{\pi}{4}[\pi]$

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points $A(2-4i)$, $B(-2-i)$ et $M(z)$. On pose pour tout $z \neq -2-i$, $Z = \dfrac{z-2+4i}{z+2+i}$.

I-) Méthode algébrique

1-) On pose $z = x + iy$. Écrire Z sous forme algébrique puis en déduire $Im(Z)$ et $Re(Z)$.

2-) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan tels que :

a) $|Z| = 1$ **b)** $|Z| = 2$ **c)** $Z \in \mathbb{R}$ **d)** $Z \in \mathbb{R}_+$ **e)** $Z \in i\mathbb{R}$

II-) Méthode géométrique

1-) Donner une interprétation géométrique de $|Z|$ et $\arg Z$

2-) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ M(z) tels que :

a) $|Z| = \dfrac{\pi}{4}[\pi]$ **b)** $|Z| = 2$ **c)** $Z \in \mathbb{R}$ **d)** $Z \in \mathbb{R}_-^*$ **e)** $Z \in i\mathbb{R}$

Exercice 4

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) \quad : \quad z^4 - (2-i)z^3 - 3iz^2 + (4-i)z + 1 + 3i = 0$$

1-) Quel le terme constant du polynôme P à variable complexe z défini par :

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$$

2-) a-) Montrer que l'équation (E) admet une solution réelle notée z_1 et une solution imaginaire pure notée z_2

b-) Vérifier que $z_3 = 2 + i$ est solution de l'équation (E).

c-) Chercher alors la solution la solution restante, notée z_4 de l'équation (E).

a) Montrer que :

$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$$

b) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4^{n-1}}$$

.

c) Pour tout $\alpha \in]0; pi[$, et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$$

Montrer que : $\qquad 2^{n-1}H_n(\alpha) = \dfrac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}$

d) Calculer de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. En déduire que, $\forall n \geq 2$,

$$\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \cdots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 9

Soit , $n \in \mathbb{N}^\star$, $\quad \omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. On pose pour $z \in \mathbb{C}$,

$$P(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z + 1 - (z-\omega)(z-\omega^2)\cdots(z-\omega^{n-1})$$

.

1) Montrer que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$.

2) Montrer que $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$ sont $n-1$ racines distinctes de P.
En déduire que $P(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et que $n = (1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{n-1})$.

3) Montrer que, par un calcul de module, que :

$$\sin\frac{\pi}{n} \times \sin\frac{2\pi}{n} \times \sin\frac{3\pi}{n} \times \cdots \times \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct . Soit l'application f telle que :
$f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ avec z un complexe différent de i et de $-i$

1) Résoudre l'équation $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2) **a)** Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-i; i\}, \quad f(z) = f(z') \Leftrightarrow z = z'$ ou $zz' = 1$.

b) Soit z et z' deux nombres complexes différents de i et $-i$ de tel que : $|z| < 1$ et Montrer que $f(z) = f(z') \Rightarrow z = z'$.

3) Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tels que $z \in \mathbb{C}\backslash\{-i;i\}$ et $f(z)$ soit réel.

4) Dans cette question on pose $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi;\pi]\backslash\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$.

a) Montrer que $f(z)$ est réel et le calculer en fonction de θ .

b) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$U_n = 1 + f(z) + (f(z))^2 + \cdots + (f(z))^n$$

. Pour quelle valeur de θ cette suite converge-t-elle ?

<u>**Exercice 11**</u>

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

a) $z^2 - 2z + 5 = 0$ **b)** $z^2 - 2(1+\sqrt{3})z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

2) On considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs

$$z = 1 + 2i \quad ; \quad z = 1 + \sqrt{3} + i \quad ; \quad z = 1 + \sqrt{3} - i \quad et \quad 1 - 2i$$

a) Placer A, B, C et D dans le plan (P).

b) Vérifier que $\dfrac{z_D - z_B}{z_A - z_B} = i\sqrt{3}$. En déduire la nature du triangle ABD.

c) Montrer que A, B, C et D appartiennent à un même cercle (Γ) dont on précisera le centre et le rayon.

3) On considère $(E) : z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$.

a) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

b) Montrer les points images des solutions de (E) appartiennent à (Γ).

<u>**Exercice 12**</u>

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 = 1$.

2) **a-** Développer $(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^3$.

b- Soit l'équation $(E) : z^3 = 4\sqrt{2}(-1-i)$. En posant, $u = \dfrac{z}{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}$, déterminer sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique, les racines de l'équation E.

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

<u>**Exercice 13**</u>

1) Exprimer $1 - \cos 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et exprimer $\sin 2\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2(1 - \cos 2\theta) - 2z\sin 2\theta + 1 = 0$ dans la quelle z est l'inconnue et θ est un paramètre réel tel que $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$

3) Déterminer un module et un argument de chacun de racines z_1 et z_2 .

4) On désigne par M_1 M_2 les image de z_1 et z_2 dans le plan rapporte au repère orthonormé $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$. Déterminer θ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle et rectangle en O.

Exercice 14

On pose, pour tout entier $k \geq 0$: $z_k = \dfrac{1+k(k+1)+i}{1+k(k+1)-i}$ et on note : $|z_k| = \rho_k$ et $\arg z_k = \alpha_k$.

Partie A

1) Montrer que, pour tout $k \geq 0$, $\rho_k = 1$ et $\tan\dfrac{\alpha_k}{2} = \dfrac{1}{1+k(k+1)}$.

2) Placer dans le plan complexe les points d'affixes z_0, z_1 et z_2.

3) **a)** Démontrer que , pour tout entier $k \geq 0$, il existe un unique réel θ_k de l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\theta_k = k$.

b) Calculer $e^{i\theta_0}$ et $e^{i\theta_1}$ et placer sur le cercle trigonométrique les points images de $e^{i\theta_0}$, $e^{i\theta_1}$, $e^{i\theta_2}$, $e^{i\theta_3}$, en utilisant un procédé de construction simple .

c) Démontrer que , pour tout entier $k \geq 0$, $\dfrac{\alpha_k}{2} = \theta_{k+1} - \theta_k$.

Indication : Remarquer que $\dfrac{1}{1+k(k+1)} = \dfrac{(k+1)-k}{1+k(k+1)}$

Partie B

On pose :$s_1 = z_1$, $s_2 = z_1 \times z_2$, $s_3 = z_1 \times z_2 \times z_3$ et pour tout entier $n \geq 4$, $s_n = z_1 \times z_2 \times z_3 \cdots \times z_n$.

1) Quel est le module de s_n ? Exprimer son argument en fonction de θ_{n+1} et de θ_1.

2) Par définition, une suite de nombres complexes $(r_n e^{i\varphi_n})$ converge vers le nombre complexe $re^{i\varphi}$ si : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = r$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n = \varphi$.Trouver la limite de la suite (s_n).

Exercice 15

Soit l'équation (E) : $z^5 = 1$.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et représenter les images des solutions .

2) Démontrer que la somme des solutions (E) est nulle et en déduire que :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$$

.

3) Démontrer que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

4) Soit l'équation (E') : $(z-1)^5 = (z+1)^5 \quad z \in \mathbb{C}$.

a) Démontrer que si z_0 est solution de (E') alors $\left|\dfrac{z_0-1}{z_0+1}\right| = 1$. En déduire que les solutions de (E') sont imaginaires pures .

b) Résoudre alors (E').

Exercice 16

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z'. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x ,y , x' et y' sont des réels .

1) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si seulement si $Re(z'\bar{z}) = 0$.
2) Montrer que les points O, M et M' sont alignés si seulement si $Im(z'\bar{z}) = 0$.
   Application
3) Soient N le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soit orthogonaux.
4) On suppose que z est non nul et soit P le point d'affixe $\frac{1}{z}$. On recherche l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés .
   a) Montrer que : $\left(\frac{1}{z^2} - 1\right)(\overline{z^2 - 1}) = \bar{z}^2 \left|\frac{1}{z^2 - 1}\right|^2$.
   b) En utilisant l'équivalence démontrer au début de l'exercice; conclure sur l'ensemble recherché.

0.2.2 Séries : 2

Exercice : 1

1) Soit z_1 et z_2 deux complexes de même module 1 et d'arguments respectifs α et β
   Montrer que : le rapport $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel strictement positif .
2) Soit A et B deux points du plan complexe, non alignés avec d'affixes respectives a et b.
   Soit $G = bar\{(A; |b|), (B; |a|)$.
   a) Déterminer en fonction de a et b l'affixe z point G.
   b) A l'aide du 2-)a-) , montrer que $\frac{z^2}{ab}$ est un réel strictement positif .
   c) Exprimer $\arg z$ en fonction de $\arg a$ et $\arg b$. En déduire que $\overrightarrow{OG}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle orienté $\widehat{AOB}$.

Exercice : 2

Le Plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O , \vec{i} , \vec{j})$. On considère les points $A(\alpha = 1 - i)$ et $B(\beta = 1 + i)$. On considère l'application φ qui , à tout point M d'affixe distinct z de 0 , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = 2 - \frac{2}{z}$.

1) Montrer que A et B sont invariants par φ .
2) Soit $M(z)$ un point distinct de A et de B , d'image $M'(z')$ par φ.
   a) Montrer que : $\frac{z' - \beta}{z' - \alpha} = y \frac{z - \beta}{z - \alpha}$ où $y = \frac{\alpha}{\beta}$

b) En déduire que : $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{M'A}{M'B}$ et donner la relation entre $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$.

c) Déduire de ces relations que si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ alors son image M' par φ appartient à la droite (AB) privé des points A et B.

Exercice : 3

Soit A et B les points d'affixes respectives -1 et 1. A tout M d'affixe Z, on associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3$.

1) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que l'affixe Z' du point M' soit un nombre réel strictement positif. Montrer que M appartient à (E) si et seulement si $3(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi]$.

2) Représenter (E).

Exercice : 4 *Bac 94 1er groupe*

Soit n un entier naturel non nul et soit q un réel distinct de 0 , 1 et -1.

On considère dans le plan complexe ,n points $A_0, A_1 \dots A_{n-1}$ d'affixes respectives $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.

1) Démontrer que le système de points pondérés : $\{(A_k, q^k), \quad 0 \le k \le n-1\}$ admet un barycentre G_n.

2) On choisit les nombres complexes z_k de la façon suivante : $z_0 = 1$ $z_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ et $z_k = (z_1)^k$ Pour $1 \le k \le n-1$.

a) Déterminer l'affixe Z_n de G_n l'aide de q et z_1.

b) Préciser la partie réelle de X_n et la partie imaginaire Y_n de Z_n.

3) **a)** Déterminer n pour que Z_n soit un réel ?

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n$. En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice : 5

Dans le plan complexe, on donne trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c non nulles et trois points P, Q, R d'affixes respectives $p = \dfrac{|a|}{a}, \quad q = \dfrac{|b|}{b}, \quad r = \dfrac{|c|}{c}, \quad$.

1) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle PQR et H le point défini par :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

a) Montrer que H est l'orthocentre du triangle PQR .

b) Montrer que PQR est équilatéral si et seulement si l'on a : $p + q + r = 0$.

2) On suppose dans cette question que $p + q + r = 0$.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Comparer s_1 et s_2 avec :
$s_1 = |z-a| + |z-b| + |z-c|$ et $s_2 = p|z-a| + q|z-b| + r|z-c|$.
En déduire que $z \in \mathbb{C}$, on a : $|z-a| + |z-b| + |z-c| \ge |a| + |b| + |c|$.

b) Montrer qu'il existe un point M tel que : $MA + MB + MC$ soit minimal.

b) En déduire que : $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{M'A}{M'B}$ et donner la relation entre $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B})$.

c) Déduire de ces relations que si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ alors son image M' par φ appartient à la droite (AB) privé des points A et B.

Exercice : 3

Soit A et B les points d'affixes respectives -1 et 1. A tout M d'affixe Z, on associe le point M' d'affixe Z' tel que : $Z' = \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^3$.

1) Soit (E) l'ensemble des points M du plan tels que l'affixe Z' du point M' soit un nombre réel strictement positif. Montrer que M appartient à (E) si et seulement si $3(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi[2\pi]$.

2) Représenter (E).

Exercice : 4 *Bac 94 1er groupe*

Soit n un entier naturel non nul et soit q un réel distinct de 0 , 1 et -1.
On considère dans le plan complexe ,n points $A_0, A_1 \dots A_{n-1}$ d'affixes respectives $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$.

1) Démontrer que le système de points pondérés : $\{(A_k, q^k), \quad 0 \le k \le n-1\}$ admet un barycentre G_n.

2) On choisit les nombres complexes z_k de la façon suivante : $z_0 = 1$ $z_1 = \cos\dfrac{2\pi}{n} + i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ et $z_k = (z_1)^k$ Pour $1 \le k \le n-1$.

a) Déterminer l'affixe Z_n de G_n l'aide de q et z_1.

b) Préciser la partie réelle de X_n et la partie imaginaire Y_n de Z_n.

3) **a)** Déterminer n pour que Z_n soit un réel ?

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n$. En déduire la position limite du point G_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice : 5

Dans le plan complexe, on donne trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c non nulles et trois points P, Q, R d'affixes respectives $p = \dfrac{|a|}{a}, \quad q = \dfrac{|b|}{b}, \quad r = \dfrac{|c|}{c}, \quad .$

1) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle PQR et H le point défini par :

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

a) Montrer que H est l'orthocentre du triangle PQR .

b) Montrer que PQR est équilatéral si et seulement si l'on a : $p+q+r=0$.

2) On suppose dans cette question que $p+q+r=0$.

a) Soit $z \in \mathbb{C}$. Comparer s_1 et s_2 avec :
$s_1 = |z-a|+|z-b|+|z-c|$ et $s_2 = p|z-a|+q|z-b|+r|z-c|$.
En déduire que $z \in \mathbb{C}$, on a : $|z-a|+|z-b|+|z-c| \ge |a|+|b|+|c|$.

b) Montrer qu'il existe un point M tel que : $MA+MB+MC$ soit minimal.

Exercice : 6

Soit (C) un cercle de centre $A(1;0)$ et de rayon 1.Pour tout point M distinct de O du cercle (C), on note le point M' , symétrique de M par rapport à $(x'Ox)$.

1) Expliquer pourquoi l'affixe du point M peut se mettre sous la forme :

$$z = 1 + e^{i\theta}, \quad \theta \in]-\pi;\pi[$$

2) Déterminer l'affixe z' de M' .
3) Calculer le quotient $\dfrac{z}{z'-1}$ en fonction de θ .
4) Déduisez-en les points M de (C) pour lesquels :
   a) $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires.
   b) $\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux.

Exercice : 7

Soit ABC un triangle isocèle de sommet A de sens direct .Sur ces cotés on construit deux carrés de sens direct $ACDE$ et $BAGF$. Soit M le milieu du coté $[BC]$.
Démontrer que $EG = 2AM$ et $\quad (AM) \perp (EG)$.

Exercice : 8

Dans le plan complexe, on considère les points $A(a), \quad B(b), \quad C(c)$. ABC est un triangle de sens direct, A' milieu de $[BC]$.

1) On construit extérieurement au triangle ABC les triangles rectangles et isocèles BPC, CQA, ARB respectivement en P, Q, R.
   a) Montrer que l'affixe de P est : $p = \dfrac{b+c}{2} + i\dfrac{b-c}{2}$
   b) Exprimer de la même façon les affixes q de Q et r de R
   c) En déduire que les triangles ABC et PQR ont même centre de gravité.
2) Quelle est la nature du triangle $A'QR$?
3) Montrer que $p - a = i(r - q)$; en déduire que $(AP) \perp (QR)$.
4) Montrer que les droites (AP), $\quad$ et (CR) sont concourantes.

Exercice : 9

Dans le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v}$ On considère trois nombres complexes non nuls deux à deux distincts a, b, c tels que $|a| = |b| = |c|$ On appelle A, B, C les points d'affixes respectives a, b, c ; H d'affixe $h = a + b + c$. Le but de l'exercice est de montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC

1) a) Soit $w = \bar{b}c - b\bar{c}$. Montrer que w est imaginaire pure.
   b) Utiliser la question précédente pour montrer que :
   $(b+c)(\bar{b} - \bar{c}) \quad$ et $\quad \dfrac{b+c}{b-c}$ sont imaginaires pures.
2) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont orthogonaux.

3) Que représente H pour le triangle ABC ?

Exercice : 10

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Soit M_1, M_2, M_3 les points d'affixes respectives z_3 , z_3 et z_3.

1) Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si
$z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$ où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
(On pourra utiliser une rotation de centre M_2).

2) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :
$z^3 - (1+a+ia)z^2 + a(1+i+ia)z - ia^2 = 0.$ où a désigne un paramètre complexe.

a) Vérifier que 1 est une solution de (E). Déterminer les deux autres solutions z' et z'' de (E)

b) Soit A, B, C les points d'affixes $1, z', z''$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le triangle ABC soit équilatéral .On exprimera chaque valeur sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Exercice : 11

Soit α et β deux nombres complexes quelconques. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et pour tout complexe $z : f(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$

1) Montrer que : $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| = 3$ (On rappelle que : $1 + J + J^2 = 0$ et $j^3 = 1$).

2) **a)** En déduire que $|f(1)| + |f(j)| + |f(j^2)| \geq 3$.

b) En, utilisant a), montrer que l'un au moins des nombres réels $|f(1)|, |f(j)|$ et $|f(j^2)|$ est supérieur ou égal à 1.

3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v}$. ABC est un triangle équilatéral direct de centre de gravité O et tel que l'affixe de A est le réel r strictement positif fixé. I et J sont deux points quelconques du plan d'affixes respectives a et b. Dans cette question on prend $\alpha = -\frac{a+b}{r}$ et $\beta = \frac{ab}{r^2}$.

a) Montrer que les affixes respectives de B et C sont rj et rj^2

b) Montrer que $BO.BI.BJ \geq r^3|f(j)|$ .Calculer de la même manière $CO.CI.CJ$ et $AO.AI.AJ$

c) Montrer que le triangle ABC a au moins un sommet S vérifiant $SO.SI.SJ \geq r^3$

Exercice : 12

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v}$. On note (C) le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A le point de (C) d'affixe R. Étant donné un entier $n \geq 2$, on note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$. On considère la suite de points $(M_k)_{k\geq 0}$ de (C) définie par la relation de récurrence : $M_{k+1} = r(M_k)$ et la condition initiale $M_0 = A$. On note z_k l'affixe de M_k.

1) **a)** Pour tout $k \geq 0$, exprimer z_{k+1} en fonction de z_k.

b) En déduire l'expression de z_k en fonction de k et n .

c) Comparer M_n et M_0.

d) Faire une figure lorsque $n = 16$ (on prendra R=4 cm).

2) **a)** Prouver que , pour tout $k \geq 0$: $M_kM_{k+1} = 2R\sin\frac{\pi}{n}$.

b) On note : $L_n = M_0M_1 + M_1M2 + \cdots + M_{n-1}M_n$ le périmètre du polygone régulier $(M_0, M_1, \ldots M_n)$. Déterminer la limite de L_n lorsque n tend vers plus l'infini.

Exercice : 13

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct. A tout point M du plan d'affixe z non nulle on associe le point M' telle que $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ est le conjugué de conjugué z .

1) Déterminer une relation entre les arguments de z et z'. En déduire que les points O, M et M' sont alignés.

2) Démontrer que :
$\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z+1)$

3) On désigne par A le point d'affixe 1 et on note (C) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z-1| = 1$;

a) Quelle est la nature de l'ensemble (C)?

b) Montrer que M appartient à (C) si et seulement si $|z'-1| = |z'|$.

c) Quel est l'ensemble des points M' du plan lorsque M décrit (C)?

Extrait Bac 2012 groupe 2

Exercice : 14

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On note $z = x + iy$ l'affixe du point m , x *et* y étant des réels. On désigne par u un nombre de la forme $u = 1 + ik$, $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. On désigne par S_u l'application du plan dans lui-même qui , au point m associe le point m' d'affixe $z' = uz$.

1) **a)** Déterminer la nature S_u.

b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{Om}$ *et* $\overrightarrow{mm'}$ sont orthogonaux pour tout $m \neq 0$.

2) On désigne par u *et* u' deux nombres complexes de partie réelle 1 : $u = 1+ik$ *et* $u' = 1 + ik'$ avec k *et* k' des réels non nuls. On note M le point d'affixe $Z = uu'$.

a) Exprimer les coordonnées (X, Y) de M en fonction de k *et* k'.

b) Construire l'ensemble (C) des points M lorsque k et k' sont égaux et $k > 0$.

3) On note P_n le point image de u^n, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) On pose $k = \tan\varphi$ $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Calculer les coordonnées de P_n en fonction de n et φ.

b) On pose $n = 2$. Déterminer les valeurs de φ pour lesquelles :

i) P_2 appartient à la droite d'équation $y = x$.

ii) P_2 est égal au point de coordonnées $(-2; -2\sqrt{3})$.

Exercice : 15 *Bac 93 Exercice 2*

Le P plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v}$.

1-) Soit M_1, M_2 et M_3 les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3. montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral direct si et seulement si : $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$ où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$·. (On pourra utiliser une rotation centrée en M_2)

2-) On considère l'ensemble des nombres complexes l'équation (E) suivante :

$$z^3 + (1 + a + ia)z^2 + a(1 + i + ia)z - ia^2 = 0$$

Où a désigne un paramètre complexe.

a) Vérifier que 1 est solution de (E).

b) Calculer les deux autres solutions z' et z'' de (E).

c) Soit A , B et C les points d'affixes respectives 1 , z' et z''. Déterminer les deux valeurs complexes de a pour lesquelles le triangle ABC est équilatéral. On exprimera chaque valeur sous forme algébrique et sous forme exponentielle.

LES NOMBRES COMPLEXES AU BAC S2

Exercices 0

1)Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :

a) * $z+3\bar{z}=\left(2+i\sqrt{3}\right)|z|$;* $iz-2\bar{z}+2-i=0$;* $4z^2+8|z|^2-3=0$.

b) * $\sqrt{3}\cos x-\sin x=-1$;* $3\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=3$.

c) Soient les nombres complexes $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$; $z_2=1-i$.

* Mettre sous forme trigonométrique z_1 ; z_2 et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$.

*En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6+\sqrt{2}}}{4}$ et $\sin\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

*On considère l'équation d'inconnue $x\in IR$.$(E):\left(\sqrt{6+\sqrt{2}}\right)\cos x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin x=2$

_ Résoudre (E) dans IR puis placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2) Soit C le corps des nombres complexes et i un nombre complexe tel que $i^2=-1$.

a) calculer $\left(\dfrac{1}{2}+i\sqrt{3}\right)^4$ .b) déterminer les réels a,b tels que : $(a+ib)^4=\dfrac{73}{16}-\dfrac{11}{2}\sqrt{3}i.$

3) Linéariser les expressions trigonométriques suivantes .

a) A(x) = $\cos^4 x\sin x$; b) B(x)=$\cos^3\dfrac{x}{2}$.

EXERXICE 1 BAC 2003

Dans l'ensemble C des nombres complexes, on considère l'équation $(E): Z^3+(1-8i)Z^2-(23+4i)Z-3+24i=0$

a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer

b) Montrer que $1+2i$ et $-2+3i$ sont solutions (E)

c) Donner l'ensembles des solutions de (E)

Dans le plan rapporté à un repère ortho normal $(o,\vec{u},\vec{v})$ Soit A, B et C d'affixes respectives $+2i$ $3i$, $-2+3i$

Soit G bar $\{(A,2),(B-2),(C,1)\}$

a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$ ont pour affixes respectives $\sqrt{2}e^{i\frac{\Pi}{4}}$, $2i$, $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\Pi}{4}}$ et que ces affixes sont dans cet ordre en progression géométrique ; déterminer la raison de cette suite .

b) En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C .Donner les éléments caractéristiques.

EXERCICE 2 BAC 2002

1) Montrer que dans C la somme des racines n^ième^ de l'unité est égale à zéro $(n\geq 2)$

2) En utilisant les résultats du 1) montrer que $\cos(\frac{\Pi}{5})$ est solution de l'équation $4x^2-2x-1=0$

3) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\Pi}{5}$, $\cos\frac{2\Pi}{5}$ et $\cos\frac{\Pi}{10}$

<u>EXERCICE3</u> BAC 2001

Le plan complexe (P) est muni d'un repère ortho normal direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

Soit f l'application de $C-\{2i\}$ vers C définie par $f(z)=\frac{2z-i}{z-2i}$

a) Résoudre dans C f(z)=z .Donner les solutions z_1 et z_2 sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique .

b) Calculer $z_1^4+z_2^4$

1) Soit M(z) un point de (P)

Soit (Γ) l'ensemble des points M(z) tels que f(z) soit imaginaire pur ,donner une équation cartésienne de (Γ),Tracer (Γ).

2) Monter que $/z/=1 \Leftrightarrow /f(z)/=1$

<u>EXERCICE 4</u> BAC 2000

On considère les points A_1, A_2 et A_3 d'affixes respectives :

$z_1=1 \quad z_2=1+\sqrt{2}+i\sqrt{2} \quad z_3=\frac{5+i\sqrt{3}}{4}$

1. a) Donner une écriture trigonométrique des nombres complexes z_2- z_1 et z_3-z_1

b) Donner une écriture trigonométrique de $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$

En déduire les valeurs exactes $\cos(\frac{\Pi}{2})$ et $\sin(\frac{\Pi}{12})$

2) Soit S la similitude plane directe transformant A_2 en A_3 et A_1 en A_1

a) Préciser les éléments caractéristiques de S

b) On désigne par M' d'affixe z' l'image de M d'affixe z

Exprimer z' en fonction de z. En déduire l'image par S du point B d'affixe $1-4\sqrt{2}e^{-\frac{i\Pi}{3}}$

<u>Exercice 5</u> BAC 1999

On considère l'équation $(E): z^3+(3-2i)z^2+(1-4i)z-1-2i=0$

1. a) Vérifier que (E) admet une solution réelle

b) Achever la résolution de (E)

2) Dans le plan complexe on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=-1.; z_B=-2+i \quad z_C=i$

a) Déterminer le module et un argument de $\frac{Z_B-Z_A}{Z_C-Z_A}$

b) En déduire la nature du triangle ABC

c) Donner le centre, le rapport et l'angle de la similitude plane directe qui laisse invariant A et transforme B en C .

<u>EXERCICE 6</u> BAC 1998

1) Résoudre dans C les équations

a) $Z^2 - 2Z + 5 = 0$ b) $Z^2 - 2(1+\sqrt{3})Z + 5 + 2\sqrt{3} = 0$

On considère dans le plan rapporté à un repère ortho normal $(o, \vec{u}, \vec{v})$ les points A, B, C et D d'affixes respectives $1+2i\,; 1+\sqrt{3}+i\,; 1+\sqrt{3}-i\,; 1-2i$

a) Placer A, B, C, D dans le plan (P)

b) Vérifier que $\frac{Z_D - Z_B}{Z_A - Z_B} = i\sqrt{3}$ en déduire la nature du triangle ABD

c) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle (C) dont ont précisera le centre et le rayon.

3) On considère l'équation (E) : $Z^2 - 2(1+2\cos\theta)Z + 5 + 4\cos\theta = 0;\ \theta \in IR$

a) Résoudre (E) dans C

b) Montrer que les points images des solutions de (E) appartiennent à (C) .

<u>EXERCICE 7</u> BAC 1997

1. a) Calculer le module et un argument du nombre complexe $w = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4}$

b) En déduire ses racines carrées

2) Résoudre dans C L'équation suivante $Z^2 + (\sqrt{3} - 7i)Z - 4(3 + i\sqrt{3}) = 0$

3) Soit Z_1 la solution imaginaire pure et Z_2 l'autre solution, montrer que $\frac{Z_2 - 2i}{Z_1 - 2i} = w$

4) Dans le plan complexe rapporté à un repère ortho normal $(o, \vec{u}, \vec{v})$ soit A, B et C les points d'affixes respectives $2i$, Z_1 , Z_2

Préciser la nature du triangle ABC en utilisant1. a)

<u>Exercice 8</u>

1) Déterminer, sous forme trigonométrique,les solutions de l'équation : $z^3 = 4\sqrt{2}(-1+i)$ dans l'ensemble des nombres complexes.
2) En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de cette équation sous forme algébrique .
3) En déduire des questions précédents les valeurs de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

<u>EXERCICE 9</u> BAC 1995

On considère le polynôme P de variable complexe Z définie par $f(Z) = Z^3 + iZ^2 - 3Z + 5i$

1) Calculer P(i) puis déterminer toutes les racines de P(z) on notera Z_1 la racine dont la partie réelle est négative et Z_2 l'autre racine .

2 a) Ecrire sous forme trigonométrique que le nombre complexe $\frac{Z_1 - i}{Z_2 - i}$

Dans le plan complexe de repère $(o, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A(i), B (Z_1) et C(Z_2)

Déduire de la question précédente la nature du triangle ABC.

On considère A(i), B(-i) et M(z) on pose $Z = \frac{z-i}{z+i}$

1. a) Déterminer l'ensemble (D) des points M(z) tels que Z soit réel.

b) Déterminer l'ensemble (C) des points M(z) tel Z soit imaginaire pur

2. a) Interprétez géométriquement les modules de $z-i$ et z+i

Montrer que /Z/=1si et seulement si z est réel

b) Soit $n \in IN^*$ et $a \in \left]0, \frac{\Pi}{2}\right[$ déduire de la question précédente que l'équation (E) :

$(\frac{z-i}{z+i})^2 = \cos 4a + i\sin 4a$ n'admet que des solutions réelles.

(on ne demande pas de les calculer).

c) Résoudre l'équation $Z^2 = \cos 4a + i\sin 4a$ .En déduire les solutions de (E).

EXERCICE 11

Soit (P) le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$

On considère les applications T_1, T_2 dont les écritures complexes sont : $T_1 : z_1 = (\sqrt{3}+i)z$ et $T_2 : z_2 = (1-i\sqrt{3})z + 3$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T_1 et T_2

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $T_2 o T_1$

3) Démontrer qu'il existe un seul point K tel que $T_1(K) = T_2(K)$ .soit $L = T_1(K)$

Calculer les affixes des points K et L.

4) Démontrer que le point L est invariable par chacun des applications $T_2oT_1^{-1}$ et $T_1oT_2^{-1}$

Quelle est la nature de chacune de ces applications. Préciser leurs éléments caractéristiques

EXERCICE 12

1) On considère l'équation (E) dans C : $Z^4 + 7 + 24i = 0$

a) Vérifier $Z_0 = 2 - i$ est une solution de (E)

b) Déterminer les racines quatrièmes de l'unité dans C et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

2)Dans le plan complexe de repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$ on considère $A(1+2i)$, $B(-2+i)$; $C(-1-2i)$ et $\Omega(2-i)$

a) Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe S_1 de centre Ω qui transforme A en B.

b) Soit S_2 la transformation du plan qui à tout point M(z) associe le point M'(z') tel que $z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{1-3i}{2}$ caractériser $S = S_2 o S_1$

3) Soit r la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\Pi}{2}$

a) Donner l'affixe du point D tel que r(O)=D

b) Montrer que les points O, A, D et B appartienne à un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

c) Déterminer l'image du cercle (C) par r .

4) Soit $T_2 : M(z) \to M_2(z_2)$ tel que $z_2 = \alpha^2 z + \beta$, α et $\beta \in C$

Déterminer α et β tels que $S_2 o T_2$ soit :

a) Une translation de vecteur $\vec{u}\binom{1}{0}$

b) Une rotation de centre O et d'angle $-\frac{\Pi}{2}$

EXERCICE 13

Le plan complexe est muni d'un repère ortho normal direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points $A'(\alpha = 1-i)$ $B(\beta = 1+i)$

A tout point M d'affixe z distinct de O, la fonction φ associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = 2 - \frac{2}{z}$

1) Montrer A et B sont invariants par φ .
2) Soit M(z) distinct de A et de B, d'image M'(z') par φ

a) Montrer que $\frac{z'-\beta}{z'-\alpha} = y\frac{z-\beta}{z-\alpha}$ où $y = \frac{\alpha}{\beta}$

b) En déduire que $\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B}$ et donner la relation entre $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{M'A},\overrightarrow{M'B})$

c) Déduire de ces relations que si M appartienne au cercle de diamètre $[AB]$ son image par φ appartient à la droite (AB) .

EXERCICE 14

Soit $P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8$

1) Montrer que $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$

a) Calculer P(i)

b) En déduire deux solutions de $(E): P(z) = 0$

2. a) Mettre P(z) sous forme d'un produit de deux polynôme de degrés 2

b) Résoudre (E)

EXERCICE 15

1) Exprimer les racines z_k dans C de l'équation $z^5 = 1$ en fonction des nombres $\theta_k = \frac{2k\pi}{5}$ *oû* $0 \le k \le 4$

2) Quelle est la nature du polygone dont les sommets A_k ont pour affixes z_k ? $(0 \le k \le 4)$

3) Montrer que $z_0+z_1+z_2+z_3+z_4 = 0$. En déduire une équation du second degré à coefficients entiers dont le nombre $a = \cos\frac{2\pi}{5}$ est solution. (On remarquera que $z_4 = \frac{1}{z_1}$ *et* $z_3 = \frac{1}{z_2}$ et $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$)

4) Résoudre cette équation et calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$; $\cos\frac{4\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{8\pi}{5}$

EXERCICE 16

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sin\frac{\Pi}{n} + \sin\frac{2\Pi}{n} + \dots\dots + \sin\frac{(n-1)\Pi}{n}$

a) Posons $z=\cos\frac{\Pi}{n}+i\sin\frac{\Pi}{n}$. Donner une expression simple de la somme $1+z+z^2+......+z^{n-1}$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de cette somme

En déduire l'égalité $S_n=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{2n}}$

b) Quelle est la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)n\in\mathbb{N}^*$?

EXERCICE 17

Soit $n>0$; $\theta \in]0;\pi[$; on considère les expressions

$S_n=\cos^2\theta+\cos^2\theta\cos 2\theta+........+\cos^p\theta\cos p\theta+.......+\cos^n\theta\cos n\theta$

$S_n^{'}=\cos\theta\sin\theta+\cos^2\theta\sin 2\theta+......+\cos^p\theta\ \sin p\theta+........+\cos^n\theta\sin n\theta$

On pose $T_n=S_n+iS_n^{'}$

Montrer que T_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique complexe dont on donnera le premier terme et la raison .

En déduire une expression simple de T_n, puis de S_n en fonction n et θ (on montera que $S_n=\cos_{\theta}^{n+1}(\frac{\sin n\theta}{\sin\theta})$

EXERCICE 18

Soient, dans le plan complexe P, deux points M et M' d'affixes respectives z et z' tels que l'on ait : z' = (1 + i) z + 1

1°) Calculer le module et un argumentde1 + i.

2°) Déterminer les éléments géométriques de la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe (1 + i) z +1.

3°) Déterminer l'ensemble des M du plan complexe tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ aient la même norme.

EXERCICE 19

Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : z' = $2(1+i\sqrt{3})z+3$.

1°) Quelle est la nature de f? Préciser ses éléments caractéristiques.

2°) Soit D,droite d'équation : x - y $\sqrt{3}$ = 0. Quelle est l'équation de l'image f(D) de D?

3°) Quelle est l'image par f du cercle de rayon 2 dont le centre est le point I(2i) ?

EXERCICE 20

Dans plan complexe, soit f la transformation qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : z' = $(1+i\sqrt{3})\ z+\sqrt{3}(1-i)$.

1°) démontrer que f admet un unique point invariable I ; déterminer l'affixe de I. Caractériser géométriquement f.
2°) Soit G le barycentre des points I, M, M' affectés respectivement les cœfficients 3, 2, 1. Calculer les coordonnées de G en fonction de celles de M.
3°) On suppose que le point M décrit la droite d'équation : y = x.
Quel l'ensemble décrit par le point G?

Exercice21

Soit $(z_n)_{n\in IN}$ la suite de nombres complexes définie par la donnée de $z_0 = 2\sqrt{2}(-1+i)$ et les conditions suivantes : pour tout entier naturel n,un représentant de l'argument de z_{n+1}

appartient à l'intervalle $[\frac{\pi}{2};\pi]$ et $z^4{}_{n+1} = z_n$.

1) Déterminer le module et un argument de z_1.
2) On pose $r_n=|z| et v_n = \ln r_n$. Montrer que $(v_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique.



Dénombrement

Exercice 1

Un ensemble E contient 320 éléments .Trois sous ensembles A , B et C de E sont tels que :

- A et B sont disjoints;
- $Card(A \cap B) = Card(B \cap C)$
- $Card(A \cup B \cup C) = 221$
- $[(A \cup B) \cap \overline{C}]$ $\quad Card(\overline{C} \cap A] = 48 \quad et \quad Card(C \cap \overline{A \cup B})$

1-) Déterminer les cardinaux des ensembles A , B et C .

2-) Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

a-) $(A \cup B) \cap C$ **b-)** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **c-)** $\overline{A} \cup \overline{C}$

Exercice 2

Une urne contient 5 boules rouges, 4 boules blanches et 2 boules jaunes. On tire successivement 4 boules de l'urne en remettant à chaque tirage la boule tirée dans l'urne. Déterminer le nombre de tirages contenant :

1-) Quatre boules rouges;

2-) Une boule rouge et trois boules blanches dans cet ordre;

3-) Une boule blanche et trois boules jaunes;

4-) Quatre boules de même couleur;

5-) Autant de boules blanches que de boules rouges ;

6-) Au moins une boule rouge ;

7-) Au plus 3 boules blanches.

Exercice 3

Un commerçant achète un coffre-fort dont l'ouverture est commandée par un code à 6 chiffres.

1-) Calculer le nombre total de codes différents qu'il est possible d'avoir (le code 000 000 étant bien entendu possible).

2-) Calculer le nombre de codes composés de 2 chiffres différents, l'un étant utilisé une fois, l'autre 5 fois.

Exercice 4

Une urne contient 7 boules blanches et 6 boules rouges .On tire successivement sans remise 5 boules de l'urne .Déterminer le nombre de tirages contenant :

1-) Trois boules blanches et deux boules rouges ;

2-) Une boule blanche et quatre boules rouges dans cet ordre ;

3-) Au moins trois boules rouges ;

4-) Cinq boules de même couleur.

Exercice 5

Un sac contient 10 boules blanches numérotées de 1 à 10 , deux boules rouges numérotées 1 et 2 et enfin trois boules noires numérotées de 1 à 3 .On tire simultanément 3 boules du sac . Déterminer le nombre de tirages comportant :

1-) Trois boules blanches ;

2-) Un boule rouge et deux boules noires ;

3-) Trois boules de même couleur ;

4-) Trois boules portant le même numéro ;

5-) Trois boules de numéros pairs.

Exercice 6

Une assemblée de 12 personnes se compose de 5 hommes et 7 femmes .Les membres de cette assemblée se proposent de désigner un comité de 6 personnes. De combien de façon peut-on constituer un comité comprenant :

1-) Deux hommes et deux femmes seulement.

2-) Au moins une femme.

Exercice 7

1-) Le code PIN d'un portable est un nombre de quatre chiffre choisis parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

a-) Quel est le nombre de codes possibles ?

b-) Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffre deux à deux distincts ?

2-) Le téléphone portable étant éteint, le propriétaire voulant l'allumer sait que les quatre chiffres de ce code sont 1, 9,9 et 5 mais il ignore l'ordre de ces chiffres. Combien de codes différents peut-on composer avec ces quatre chiffres ?

Exercice 8

Une classe de 20 élèves est constituée de 8 filles et 12 garçons .On veut désire former un bureau de 3 membres composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier.

1-) Déterminer le nombre de bureau possibles.

2-) Déterminer le nombre de bureau formés uniquement de filles.

3-) Déterminer le nombre de bureau dont le poste président est occupé par un garçon.

4-) Déterminer le nombre de bureau contenant au moins un garçon.

5-) Déterminer le nombre de bureau contenant exactement une fille.

6-) Déterminer le nombre de bureau où la fille Ami ne peut pas siéger avec le garçon Modou.

Exercice 9

On lance trois fois de suite un dé non pipé (dont les faces sont numérotées de 1 à 6) et l'on désigne par a, b, c les résultats respectifs du premier, du second et du troisième jeu. On considère l'équation sur $\mathbb{R}$:$ax^2 + bx + c$ (1) et on appelle résultat la donnée du triplé (a, b, c). Déterminer le nombre de résultats tels que :

1-) L'équation (1) admet une solution double.

2-) L'équation (1) n'admet pas de solutions réelles.

Exercice 10

On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code et d'un système d'alarme Une porte est munie d'un dispositif portant les touches 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 et A , B , C , D .La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois chiffres et deux lettres qui forment un code .Les chiffres sont nécessairement distincts , les lettres non.

1-) Quel est le nombre de codes possibles ?

2-) Déterminer le nombre de codes répondant à chacun des critères suivants :

a-) Les trois chiffres sont pairs ;

b-) Les deux lettres sont identiques ;

c-) Le code contient deux chiffres impairs.

3-) La porte est équipée d'un système d'alarme se déclenchant lorsqu'aucun des trois chiffres frappés ne figure sur la liste des chiffres du code. Déterminer le nombre de codes déclenchant l'alarme.

Exercice 11

On jette trois fois de suite un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure. On appelle résultat le triplet de numéros obtenu.

1-) Combien de résultats peut-on obtenir ?

2-) Combien y a-t-il de résultats comportant 2 et seulement 2 chiffres identiques peut-on obtenir ?

3-) Combien y a-t-il de résultats comportant 3 chiffres identiques ?

4-) Combien y a-t-il de résultats qui ont au moins uns fois 6 ?

5-) Combien y a-t-il de résultats dont la somme des chiffres du triplet est égal à 6 ?

Exercice 12 Dans 1 lot de 20 pièces fabriquées dont 6 sont défectueuses. On en prélève 4. De combien de façons différentes peut-on faire le prélèvement dans les cas suivants

1-) les quatre pièces sont bonnes.

2-) une au moins d' entre est-elle mauvaise ?

3-) deux au moins sont mauvaises.

4-) exactement deux sont mauvaises

5-) au plus trois sont mauvaises.

6-) toutes sont mauvaises.

Exercice 13 Démontrer les relations suivantes.
$A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$; $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$ et $A_{n+1}^p = (n+1)A_n^{p-1}$
puis résoudre dans l' équation :

$$x^2 - A_n^p x + pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p = 0$$

(E) : $C_n^p = C_n^q \Leftrightarrow p = q \quad ou \quad p+q = n$; puis résoudre dans $\mathbb{R}$ $C_{3x+2}^{x+1} = C_{3x+2}^{x^2+2x-8}$

Exercice 14

Douze livres sont à ranger sur sept étagères vides .

1-) Dénombrer les rangements possibles

2-) Dénombrer les rangements tels que toutes les étagères reçoivent au moins un livre .

Exercice 15 Dans le comité pédagogique d'une école composé de 8 membres, on souhaite représenter les quatre filières de recrutement. Aussi doit-il comporter 1 membre de la filière A, 2 membres de la filière B, 2 membres de la filière C, 3 membres de la filière D. Sachant que la population de la filière A est de 10, celle de la filière B de 18, celle de la filière C de 22 et celle de la filière D de 30, calculer :

a-) de combien de façons peut-on composer la représentation de la filière A ?

b-) même question pour la filière B ;

c-) même question pour la filière C ;

d-) même question pour la filière D ;

e-) de combien de manières peut-on constituer ce comité pédagogique ?

Exercice 16

I-) Propriétés

Démontrer les propriétés suivantes $C_n^p \times C_{n-q}^{p-q} = C_p^q \times C_n^p$ et $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$

II-) Dénombrement Soit l' ensemble E = -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2.On tire successivement sans remise 3 éléments a ; b ; c de l' ensemble E. on obtient un triplet (a ;b ;c) d'éléments de E.

1-) Quel est le nombre de triplets distincts qu'on peut obtenir ?

2-) Quel est le nombre de triplets distincts dont la somme : a+b+c = 0 ?

3-) Dans un repère orthonormé O.R.N. On donne les points A(-3 ;0) , B(0 ;-4) et C(2 ;2) Soit G barycentre du système (A ;a) , (B ;b) , (C ;c).

a-) Déterminer le nombre de tirages pour que G existe.

a-) Déterminer le nombre de tirages pour que G = O (centre du repère).

Probabilités

Calcul des probabilités

Lois De Probabilité

Série de synthèse : Probabilité

Exercice 1 :

Une urne contient 5 boules rouges ,4 boules vertes et 2 boules jaunes.

1-) On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Déterminer la probabilité des événements suivants :

A : « Obtenir exactement une boule rouge »

B : « Obtenir une boule rouge suivie de deux boules vertes »

C : « Obtenir trois boules de même couleur »

D : « Obtenir au moins deux boules rouges »

2-) On tire simultanément 3 boules de l'urne. Déterminer la probabilité des événements suivants :

F : « Obtenir au moins une boule jaune »

G : « Obtenir trois boules de couleurs différentes ».

Exercice 2 : Bac S1 2006

Une urne contient 6 boules indiscernables au toucher : 4 boules vertes et 2 boules jaunes.

1-) On tire au hasard simultanément 2 boules de l'urne et on note X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 2 boules, associe le nombre de boules vertes tirées. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2-) On tire au hasard deux fois de suite 2 boules simultanément, les boules tirées n'étant pas remises dans l'urne. On note A, B, C et D les évènements suivants :

A : « Aucune boule verte n'est tirée au cours du premier tirage de 2 boules » ;

B : « Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules ».

C : « Deux boules vertes sont tirées au cours du premier tirage de 2 boules » ;

D : « Une boule verte et une boule jaune sont tirées au cours du deuxième tirage de 2 boules ».

a-) Calculer $P(D/A)$, $P(D/B)$ et $P(D/C)$.

b-) En déduire la probabilité des évènements $D \cap A$, $D \cap B$ et $D \cap C$. Calculer [on remarquera que]

c-) Calculer $P(D)$.(On remarquera que $D \cup (A \cup B \cup C)$).

Exercice 3 :

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration à un certain nombre de tirs directs .Les expériences précédentes conduisent à penser que :

* S'il a arrêté le $n^{ième}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant $(n+1)^{ième}$ est 0,8.
* S'il a laissé passer le nième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6.
* La probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7.

A_n est l'événement : « Le gardien arrête le $n^{ième}$ tir ». On a donc $P(A_1) = 0.7$.

Si E est un événement alors $\bar{E}$ représente l'événement contraire.

1-) a-) Donner, pour, $n \geq$ les valeurs de $P(A_{n+1}/A_n)$ et $P(A_{n+1}/\overline{A_n})$.

b-) Exprimer $P(A_{n+1} \cap A_n)$ et $P(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$ en fonction de n.

c-) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $P(A_{n+1}) = 0.2P(A_n) + 0.6$

2-) On pose, pour, $P_n = P(A_n)$ et $U_n = P_n - 0.75$

a-) Montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison 0 ,2.

b-) En déduire l'expression de P_n en fonction de n.

c-) Montrer que P_n admet une limite que l'on calculera.

Exercice 4 :

Une urne contient 10 boules indiscernables, dont 5 rouges ,3 jaunes et 2 vertes. Dans les questions 1-) et 2-) on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne.

1-) Soit les événements suivants : A : « Les trois boules sont rouges » ; B : « Les trois boules sont de la même couleur » ; C : « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente 3 ».

a-) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

b-) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $Var(X)$.

2-) Dans cette question on ajoute aux cinq boules rouges par n boules rouges où $n \geq 2$. L'urne contient n+5 boules rouges ,3 jaunes et 2 vertes. On tire simultanément deux boules de cette urne. Soit les événements suivants : D : « Tirer deux boules rouges » ; E : « Tirer deux boules de la même couleur ».

a-) Montrer que la probabilité de l'événement D est : $P(D) = \dfrac{n(n+1)}{(n+4)(n+5)}$.

b-) Calculer la probabilité de l'événement E, $P(E)$ en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on $P(E) \geq \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5 : Bac S1 2004

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 4 boules vertes. L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 2 boules vertes. Dans chaque urne les tirages sont équiprobables et les urnes ont la même probabilité d'être choisies. On choisit au hasard l'une des urnes et l'on extrait une boule que l'on ne remet dans aucune urne ; si la boule est verte, on recommence le tirage dans la même urne ; si la boule est blanche, on recommence le tirage dans l'autre urne.

1-) Montrer que la probabilité de tirer deux boules blanches est $\dfrac{2}{9}$.

2-) Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur +1 si on obtient deux boules de la même couleur et -1 pour deux couleurs distinctes. Donner la loi de probabilité de X, son espérance mathématique $E(X)$ et son écart-type $\sigma(x)$.

3-) On dit que l'on a obtenu un succès si les deux boules sont de même couleur. On répète l'expérience précédente 5 fois de suite, Y est la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de « succès » parmi ces 5 épreuves. Quelle est la probabilité p d'avoir 4 succès exactement ? Donner une valeur approchée de p à 10^{-1} prés par excès. Calculer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

Exercice 6 : Bac S1 2002

On dispose de deux dés tétraédriques notés A et B. Les quatre faces de chacun d'eux sont numérotées de 1 à 4 Lorsqu'on jette un dé, on note le numéro de la face cachée du dé (on suppose que le dé ne peut tomber que sur une face). Pour le dé A, les quatre numéros ont tous la même probabilité d'être cachée. Pour le dé B, la probabilité de noter le numéro i est proportionnelle à i.

1-) Calculer les probabilités P_1,P_2, P_3 et P_4 pour les quarte faces du dé B.

2-) On lance les deux dés. On note i le numéro caché du dé A et j le numéro caché du dé B. on suppose les lancers indépendants ; on note la probabilité $P(i;j)$ de noter i pour le dé A et j pour le dé B.

a-) Montrer que $P(1;1) = P(2;1) = P(3;1) = P(4;1) = \frac{1}{40}$.

b-) Déterminer les probabilités $P(i;j)$ pour tous les nombres entiers i et j compris entre 1 et 4.

On appelle Z la variable aléatoire définie par : $Z(i;j)$ est le plus grand des nombres i et j. Exemple : $Z(2;1) = 2$; $Z(1;2) = 2$; $Z(1;1) = 1$

a-) Quelle sont les valeurs prises par Z ?

b-) Déterminer la loi de probabilité de Z et son espérance mathématique $E(Z)$.

Exercice 7 :

Un sac contient 3 boules numérotées respectivement 0, 1,2, indiscernables au toucher. On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac. Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées. A chaque tirage de deux boules, on associe le point M d'affixe $z = x + iy$.

1-) Calculer la probabilité des événements suivants : A : « Le point M est sur l'axe des abscisses ». B : « le point M appartient au cercle trigonométrique ».

2-) Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme $x^2 + y^2$.

a-) Calculer la loi de probabilité de X.

b-) Calculer l'espérance mathématique de X et sa variance.

c-) Définir la fonction de répartition de x puis la représenter.

Exercice 8 : Bac S_1 2014 1er groupe

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleurs noire, blanche et rouge. On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard simultanément deux boules dans l'urne et on note leur couleur. Soit G l'événement : « Obtenir deux boules de même couleur »

PARTIE : A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches. Calculer la probabilité de l'événement G.

PARTIE B :

On note n, b et r le nombre de boules respectives noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1-) On note $g(n;b;r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'événement G. Démontrer que : $g(n;b;r) = \frac{1}{72}[n(n-1) + b(b-1) + r(r-1)]$

2-) Le but de cette question est de déterminer n , b et r afin que la probabilité $g(n;b;r)$ soit minimale. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Soit N , B et R les points de coordonnées respectives $(9;0;0)$, $(0;9;0)$ et $(0;0;9)$ Soit M le point de coordonnées $(n;b;r)$.

a-) Justifier qu'une équation cartésienne du plan (NBR) est : $x + y + z - 9 = 0$

b-) En déduire que le point M est un point du plan (NBR).

1-) Démontrer que : $g(n;b;r) = \frac{1}{72}(OM^2 - 9)$

d-) Déterminer les coordonnées du point H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR).

e-) En déduire les valeurs de n , b et r afin que la probabilité $g(n;b;r)$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\frac{1}{4}$

3) On suppose que le nombre de boules de chaque couleur qui a été choisi par l'organisateur d'un jeu de telle sorte que la probabilité de l'événement G soit $\frac{1}{4}$.
Un joueur mise 1000 francs puis tire au hasard et simultanément deux boules dans l'urne.

- S'il tire deux boules de même couleurs, il reçoit k francs.
- Sinon, il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égal au gain algébrique du joueur.

a) Calculer l'espérance $E(X)$ de le variable X en fonction de k.

b) Déterminer la valeur de k pour que le jeu soit équitable.

Exercice 9 :

Deux joueurs A et B conviennent du jeu suivant qui se présente comme une succession de parties. Au départ A et B misent chacun 1 euro et lancent chacun une pièce parfaitement équilibré.

— Si A à pile et B face, le joueur A gagne et vis versa.

— Sinon la partie est nulle, les joueurs doublent leur mise et engagent une nouvelle partie. Et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant, ou que la 20ième partie soit nulle (les joueurs reprennent leur mise).

Pour tout n allant de 1 à 19, on considère les événements suivants : A_n : le jeu se termine à la n^{ième} partie et le joueur A gagne. B_n : le jeu se termine à la n^{ième} partie et le joueur B gagne N_n :la n^{ième} partie est nulle. On pose : $x_n = P(A_n)$, $y_n = P(B_n)$ et $z_n = P(N_n)$.

1-) a-) Calculer x_1, y_1 , z_1.

b-) Montrer que $x_{n+1} = \frac{1}{4}z_n$, $y_{n+1} = \frac{1}{4}z_n$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n$.

c-) En déduire que, pour n allant de 1 à 20, on a : $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

2-) On considère X la variable aléatoire égal au nombre d'euro mis en jeu lors de la partie qui conclut le jeu. Lorsque le jeu se termine à la k-ième partie, on a ainsi : $(X = 2^k)$.

a-) Donner l'expression de la plus grande valeur que peut prendre X.

b-) Calculer $P(X = 2^{20})$.

c-) Pour tout k allant de 1 à 19, exprimer l'événement $(X = 2^k)$ à l'aide des évènements A_k et B_k. En déduire $P(X = 2^k)$.

d-) Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ de X.

Exercice 10 :

On considère trois urnes U_2, U_2 et U_3. L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges. Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1et une boule de U_2 , à les mettre dans ,puis à tirer au hasard une boule de U_3 . Pour $i$prenant les valeurs 1,2 et 3, on désigne par N_i (respectivementR_i) l'événement « on tire une boule noire dans l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge dans l'urne U_i »).

1-) Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :

ARBRE DES PROBABILITÉS .

2-) a-) Calculer la probabilité des événements $N_1 \cup N_2 \cap N_3$ et $N_1 \cup R_2 \cap N_3$.

b-) En déduire la probabilité de l'événement.$N_1 \cap N_3$

c-) Calculer de façon analogue la probabilité de l'événement.$R_1 \cap N_3$

3-) Déduire de la question précédente la probabilité de l'événement N_3

4-) Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants

5-) Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

Exercice 11 :

On lance simultanément trois dés cubiques discernables désignés par les lettres A, B, C . : Les faces de chaque dé sont marquées 1, 2, 3 , 4, 5, 6. Le résultat d'un lancer est noté (a, b, c) où (a ; b : c) désignent les points marqués respectivement par les dés A, B, C.

1-) Combien y a-t-il d'éventualités ?

2-) Avec le résultat (a , b , c) d'un lancer, on écrit l'équation : $az^2 - bz + c = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$. Les trois dés étant parfaits, calculer la probabilité des événements E_1 et E_2 suivants :
E_1« 1 + i et 1 − i sont solutions de l'équation »
E_2 « L'équation admet une solution double réelle »

Exercice 12 :

Pendant l'année scolaire, la cantine d'un lycée propose souvent de riz.
Le premier jour de l'année, il y a 2 chance sur 5 qu'elle propose du riz.
Si elle en propose un jour, il y a une chance sur trois qu'elle en propose le lendemain.
Si elle n'en propose pas un jour il y a une chance sur trois qu'elle n'en propose pas le lendemain.
On appelle J_n l'événement : « la cantine propose le riz le $n^{ième}$ jour »
et K_n l'événement : « la cantine n'en propose pas le $n^{ième}$ jour ».
Soit P_n la probabilité de l'événement J_n.

1. Calculer $P(J_2/J_1)$ et $P(J_2/K_1)$. Et en déduire P_2.
2. Montrer que : $P_n = -\frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{2}{3}\cdot$.
3. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $U_n = P_n - \frac{1}{2}$.
   a) Montrer $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont - on donnera le premier terme et la raison.
   b) Calculer U_n et P_n en fonction.
   c) Un élève de l'établissement, fin mathématicien ne mange à la cantine que les jours pairs.
   Montrer que chaque fois qu'il se rend à la cantine, la probabilité qu'il a mangé du riz est comprise entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{5}{8}$

Exercice 13 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. U_1 contient trois boules noires et une boule blanche, U_2contient une boule noire et deux boules blanches. On jette un dé cubique parfaitement équilibré. Si le dé donne 6, on tire au hasard une boule dans l'urne U_2 sinon on tire au hasard une boule dans l'urne U_1.

On désigne par :

- S l'événement : « Obtenir 6 avec le dé ».
- Et N l'événement : « Tirer une boule noire ».

1-) Calculer les probabilités des événements $S\cap N$ et $S\cap\overline{N}$.

2-) Calculer la probabilité de tirer une boule noire.

3-) Calculer la probabilité d'avoir obtenu 6 avec le dé sachant que l'on a tiré une boule blanche.

Exercice 14 :

Une usine d'ampoules dispose de 3 machines qui fabriquent respectivement :20 , 30 et 50 de la production. Sachant que la probabilité qu'une ampoule défectueuse ait été fabriquée par A,B, C est : $P(D/A) = 0,05$, $P(D/B) = 0,04$ et $P(D/C) = 0,01$. Calculer :

1-) La probabilité pour qu'une ampoule soit défectueuse.

2-) La probabilité pour qu'une ampoule défectueuse provienne de A .

3-) La probabilité pour qu'une ampoule non défectueuse provienne de D.

Exercice 15 :

Une variable aléatoire X prend des valeurs 1,-1 et 2 avec des probabilités respectives e^a, e^b et e^c où a, b et c sont en progression arithmétique. On suppose que l'espérance mathématique E(X) de X est égale à 1.

1) Calculer a, b, c et la variance V(X) de X.

2) Soient A,B,C trois points d'abscisses respectives 1,-1 et 2 d'une droite graduée (Δ).

a) Calculer l'abscisse du point G barycentre de $\{(A;1),(B;2),(C;4)\}$.

b) On pose $\varphi(M) = \frac{1}{7}[MA^2 + MB^2 + MC^2]$ où M est un point de (Δ). Montrer que $\varphi(G) = V(X)$.

c) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M de (Δ) , tels que $\varphi(M) = 3$.

Exercice 16 :

Une urne contient 6 jetons numérotés de 1 à 6. Lorsqu'on tire au hasard un jeton de l'urne, on note p_i avec $i \in 1,2,3,4,5,6$,la probabilité de tirer le jeton numéroté i .On suppose les nombres p_2 , p_3, p_4, $p_5$et p_6 sont dans cet ordre en progression arithmétique de raison $r = \frac{1}{30}$.

1) a) Montrer que $p_1 = \frac{1}{12}$.

b) En déduire p_2 , p_3, p_4, p_5 et p_6.

2) On tire trois de fois suite et avec remise un jeton de cette urne, on désigne par X la variable aléatoire égal au nombre de jetons portant un numéro pair.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

a) Déterminer l'espérance mathématique de X et l'écart type de X.

3) Un joueur tire simultanément 2 jetons et on note S la valeur absolue de la différence des numéros que portent les 2 jetons tirés.

a) Déterminer la loi de probabilité de S.

b) On gagne à ce jeu lorsque $S \geq 4$. Déterminer la probabilité de gagner.

Exercice 17 :

1) a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 2y = 0$

b) Soient a, b et c des réels . Montrer que la solution générale de l'équation $ay'' - by' + cy = 0$ est de la forme $x \mapsto e^x(c_1\cos(x) + c_2\sin(x))$ où c_1 et c_2 sont des constantes réelles si et seulement si a, b et c sont proportionnels à 1 , 2 et 2 .

2) On lance trois fois de suite un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note à chaque fois le numéro de la face de dessus .Chaque numéro a la même probabilité d'apparaitre . On appelle a, b et c les résultats des premier , second et troisième jet du dé . Quelle est la probabilité pour que la solution générale de l'équation différentielle $ay'' - by' + cy = 0$ soit de la forme $x \mapsto e^x(c_1\cos(x) + c_2\sin(x))$ où c_1 et c_2 sont des constantes réelles ?

Variable Aléatoire - Loi Binomiale

Exercice 1

1. Un joueur lance deux dés dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On suppose que les dés
2. sont non truqués et donc que pour chaque dé, toutes les faces ont la même probabilité d'apparition.

   Le joueur suivant les règles suivantes:

   - Si les deux dés donnent le même numéro alors le joueur perd 10 points
   - Si les deux dès donnent deux numéros de parités différentes (l'un est pair et l'autre impair) alors il perd 5 points.
   - Dans les autres cas il gagne 15 points.

   Le joueur joue une partie et on note X la variable aléatoire correspond au nombre de points obtenus par lui.

   a . Déterminez la loi de probabilité de X puis calculez l'espérance de X.

   b. Représentez graphiquement la fonction de répartition de X.

Le joueur effectue 10 parties de suites. Les résultats des parties sont indépendants les uns des autres. On appelle alors Y la variable aléatoire égale au nombre de fois que le joueur gagne 15 points.

c. Expliquez pourquoi Y suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de Y ?

d. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une fois 15 points ?

e. Combien de fois le joueur peut espérer gagner 15 points ?

Le joueur joue n parties de suite.

f. Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une fois 15 points ?

g. A partir de quelle valeur de n sa probabilité de gagner au moins une fois 15 points est strictement supérieure à 0,9999 ?

Exercice 2

L*es résultats de cet exercice seront donnés sous forme décimale arrondie au centième.*

Un camp d'adolescents propose des stages d'activités nautiques pour débutants avec au choix: Planche à voile , plongée ou ski nautique.

Lors d'un stage donné, ce camp accueille vingt jeunes don sept seront initiés à la planche à voile, huit à la plongée et cinq au ski nautique.

Chaque stagiaire ne pratique qu'une seule des trois activités.

I. On forme un groupe de 3 stagiaires choisis au hasard parmi les vingt.

a: Combien de groupes est-il possible de former ?

b: Déterminez la probabilité de chacun des événements suivants:

A : " les trois stagiaires pratiquent des activités différentes "

B : " Les trois stagiaires pratiquent la même activité "

C : " Au moins l'un des trois stagiaires pratique le ski nautique ".

II . Parmi les trois stagiaires, un seul se prénomme Christian.

Chaque jour, on choisit un groupe de trois stagiaires chargé du service au

repas de midi.

a. Montrez que la probabilité que Christian soit choisi un jour donné pour le service de midi est égale à 0,15.

b. La durée du stage est de cinq jours.
Quelle est la probabilité de ne jamais choisir Christian pour le service de midi pendant le séjour ?

c. Quelle est la probabilité de le choisir exactement une fois ?

d. Montrez que la probabilité de choisir Christian au moins deux fois est inférieur à 0,2 .

Exercice 3

Un entraineur d'une équipe de football a étudié les statistiques de tir au but (pénalty) de ses joueurs.
Il a alors remarquer que sur une série de cinq tirs au but, un joueur pris au hasard dans son équipe marque

- 5 buts avec une probabilité de 0,2
- 4 buts avec une probabilité de 0,5
- 3 buts avec une probabilité de 0,3.

Chaque joueur, à l'entrainement, tire 2 séries de 5 ballons. On admet que les résultats d'un joueur à chacune des 2 séries sont indépendants.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirs aux buts réussis par un joueur au cours d'un entrainement.

I.

a . Calculez la probabilité, pour un joueur pris au hasard, de réussir tous ses tirs au buts lors d'un entrainement.

b . Précisez les valeurs possibles pour X et établir sa loi de probabilité.
(on pourra s'aider d'un arbre).

c . Calculez l'espérance de X .

II. L'entraineur considère que le joueur a réussi l'épreuve des tirs au but lorsque $X \geq 8$.
Montrez que la probabilité pour un joueur de réussir cette épreuve lors d'un entrainement est égale à 0,61 .

III. Chaque joueur participe à 10 séances d'entrainement.
On admet que les épreuves de tirs au but sont indépendantes les unes des autres.
On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de succés d'un joueur à l'épreuve des tirs au but au cours des ces 10 entrainements, c'est à dire le nombre de fois où il a marqué au moins 8 buts.
Si au cours d'une séance d'entrainement, il ne marque pas au moins 8 buts, on dit qu'il a eu un échec.
Les résultats seront donnés par défaut, avec 3 chiffres après la virgule.
Calculez pour un joueur :

a . la probabilité de n'avoir aucun échec lors des 10 séances.

b . la probabilité d'avoir exactement 6 succès .

c . la probabilité d'avoir au moins 1 succès.

III .Calculez le nombre minimale d'entrainement auxquels doit participer un joueur pour que la probabilité d'avoir au moins un succès soit supérieure à 0,99.

Exercice 4

Une épreuve consiste à jeter une fléchette sur une cible partagée en trois cases notées

1 , 2 , 3.

Deux concurrents A et B sont en présence.

On admet qu'à chaque lancer, chacun atteint une case et une seule et que les lancers sont indépendants.

Pour le concurrent A, les probabilités d'atteindre les cases 1 , 2 , 3 sont dans cet ordre :

$\frac{1}{12}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{7}{12}$

Pour le concurrent B, les trois éventualités sont équiprobables.

Les résultats demandés seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

I. Le concurrent A lance la fléchette 3 fois.

Les résultats des 3 lancers sont indépendants.

a . Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne chaque fois la case 3 ?

b . Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1 , 2 , 3 dans cet ordre ?

c . Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne les cases 1 , 2 , 3 dans n'importe quel ordre ?

II. On choisit un des deux concurrents.

La probabilité de choisir A est égale à deux fois la probabilité de choisir B.

a . Un seul lancer est effectué.

Quelle est la probabilité pour que la case 3 soit atteinte ?

b . Un seul lancer a été effectué, et la case 3 a été atteinte.

Quelle est la probabilité pour que ce soit le concurrent A qui ait lancé la fléchette ?

Exercice 5

Une urne contient 5 boules noires, 4 boules blanches et 1 boule verte. On tire simultanément 5 boules de cette urne.

a. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
b. Si tous les tirages sont équiprobables, quelle est la probabilité de tirer
    i. aucune boule noire ?
    ii. autant de boules vertes que de boules blanches ?
    iii. au moins une boule noire ?
    iv. exactement une boule noire et exactement une boule verte ?

Exercice 6

Una classe de terminale compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur de cette classe interroge au hasard un élève. D'un cours à l'autre, le professeur ne se rappelle pas de l'élève interrogé au cours précédent ce qui fait qu'à chaque cours, le choix de l'élève par le professeur est indépendant des choix précédents.

a. Quelle est la probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogé soit une fille ?

   n est un entier positif. On appelle X la variable aléatoire définie par:
   "X=nombre de filles interrogées durant n cours de mathématiques consécutifs"

b. Quelle est la loi de probabilité de X ?
c. Quelle est la probabilité que le nombre de filles interrogées soit égal à 4 durant 10 cours consécutifs ?
d. Quelle doit être le nombre minimum de cours consécutifs pour la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieur à 0,001 ?
e. Durant un trimestre, il y a 36 cours le mathématiques. Quel nombre de filles interrogées peut-on espérer ?

Exercice 7

Un joueur utilise un dé pipé à 6 faces. La probabilité P_k de voir appaitre la face partant le numéro k est donnée par le tableau suivant:

k	1	2	3	4	5	6
P_k	0,4	0,15	0,15	0,05	a	b

a et b étant deux nombres réels.
On appelle X la variable aléatoire correspondant au numéro de la face obtenue aprés un lancer.

a. Sachant que l'espérance de X est : E[X]=2,65, déterminez a et b.
b. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
c. Le joueur lance le dé 10 fois de suite. Les résultats des lancers sont indépendants les uns des autres. On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de lancers donnant un numéro pair sur les 10 lancers.
   i. Quelle est la loi de probabilité de Y ?
   ii. Vérifiez que l'espérance de Y est : E[Y]=2,5.
   iii. Quelle est la probabilité d'avoir Y > 8 ?
d. A chaque lancer, si le résultat est un nombre pair, le joueur gagne 3 euros, sinon, le joueur perd 2 euros. On appelle G le gain du joueur après 10 lancers.
   i. Quelles sont les valeurs que peut prendre G ?
   ii. Donnez une relation simple entre la variable Y et la variable G.
   iii. Quelle est la probabilité que le joueur ait un gain nul ?

iv. Quelle est l'espérance de G ?

Exercice 8

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.
On prélève *n* boules successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les deux événements suivants:

A:" On obtient des boules des deux couleurs";

B:" On obtient au plus une boule blanche ".

1:

a:: Calculez la probabilités de l'événement: "Toutes les boules titées sont de même couleur "

b: Calculez la probabilités de l'événement: "On obtient exactement une boule blanche".

c: Déduisez-en que les probabilités p(A et B) , p(A) et p(B) sont:

$$p(A \text{ et } B) = \frac{n}{2^n} \; ; p(A) = 1 - \frac{1}{2^{(n-1)}} \; ; p(B) = \frac{(n+1)}{2^n}$$

2: Montrez que p(A et B) = p(A).p(B) si et seulement si $2^{(n-1)} = n+1$.

3: Soit (Un) la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 par: Un= $2^{(n-1)} - (n+1)$

a: Calculez les trois premiers termes de cette suite.

b: Démontrez que cette suite est stritement décroissante.

4: Déduisez-en la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants

Exercice 9

Partie I

Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons. On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons indépendantes.
Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.
On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1: Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?

2: Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?

3: Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?

4: Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

Partie II

On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 100).

1: Quelle est la probabilité Pn qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2: Déterminez les entiers n tels Pn soit supérieur ou égal à 0,95.

Exercice 10

1: Une urne U 1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2. Une urne U 2 contient 4 jetons numérotés 1 , 2 , 3 et 4.
On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne.(Les choix sont supposés équiprobables).
a: Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
b: On a tiré un jeton portant le numéro1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U 1 ?

2: On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents.
On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.
a: Calculez la probabilité de tirer 2 jetons identiques.
b: Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.
Déterminez la loi de probabilité de S.
c: Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros est impaire,
Claude donne 10 euros à Dominique et que dans le cas contraire, Claude reçoit x euros de Dominique.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.
Calculez l'espérance mathématique de X en fonction de x, puis
déterminez x pour que le jeu soit équitable.

Exercice 11

Dans cet exercice, A et B étant deux événements, p(A) désigne la probabilité de A;
p(B/A) la probabilité de B sachant que A est réalisé.
1: Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est
une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité:

$$p_i = p(X = i) \text{ et } p_0 = 0{,}1 \; ; \; p_1 = 0{,}5 \; ; \; p_2 = 0{,}4$$

a: Définir et représentez graphiquement la fonctionde répartition de X.
b: Calculez l'espérance mathématique de X

2: Dans cette station service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7;
celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant des autres clients.
On considère les événements suivants:
C1 :" En cinq minutes, un seul client se présente" ;
C2 :" En cinq minutes, deux clients se présentent";
E :" En cinq minutes, un seul client achète de l'essence".

a: Calculer p(C1 et E).
b: Montrer que p(E / C2) = 0,42 et calculez p(C2 et E).
c: En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3: Soit Y la variable alèatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes.
Déterminer la loi de Y

Exercice 12

Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q.C.M) est utilisé.
On s'intéresse à cinq questions de ce (Q.C.M) supposées indépendantes.
A chaque question sont associées quatre affirmation, numérotées 1 , 2 , 3 et 4 , dont une seule est exacte. Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte. Sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.
Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme fractionnaire.

1: Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est à dire qu'il considère que les quatres affirmations correspondantes sont équiprobables.
a: Calculer la probabilités des événements suivants:
A: " Le candidat répond correctement à la première des cinq questions";
B: " Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq questions ".
b: On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note (-1) à toute réponse incorrecte.
Calculer la probabilité de l'événement C: " Le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions."

2: on suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse coreecte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions.
Quelle est alors la probabilité de l'événement C décrit en **1:b:** ?

Exercice 13

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On imagine n sacs de jetons S_1, S_2, ., S_n . Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc. On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :
- Première étape : on tire au hasard un jeton de S_1 ;
- Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2, et on tire, au hasard, un jeton de S_2 ;
- Troisième étape : après avoir placer dans S_3 le jeton sorti de S_2, on tire, au hasard, un jeton de S_3. et ainsi de suite.
Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, On note E_k l'événement "le jeton tiré de S_k est blanc"
1:
a) Déterminez la probabilité de E1, notée P(E1), et les probabilités conditionnelles:

$$P(E_2 / E_1) \text{ et } P(E_2 / \overline{E_1})$$

Déduisez-en la probabilité de E_2, notée $P(E_2)$.
b) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de E_k est notée p_k.

Justifiez la relation de récurrence suivante :

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$$

2: Etude d'une suite (u_k).

On note (u_k) la suite définie par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \\ \text{Pour tout entier } k \geq 1,\ u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3} \end{cases}$

a) On considère la suite (v_k) définie par, pour tout élément k de **N***, $v_k = u_k - 0{,}5$.
Démontrez que la suite (v_k) est une suite géométrique.

b) Déduisez-en l'expression de u_k en fonction de k.
Montrez que la suite (u_k) est convergente et précisez sa limite.

3: Dans cette question, on suppose que n = 10. Déterminez pour quelles valeur de k on a:

$$0{,}4999 \leq p_k \leq 0{,}5$$

Exercice 14

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences précédentes conduisent à penser que :

- s'il a arrêté le $n^{ième}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant [le $(n + 1)^{ieme}$] est 0,8;
- s'il n'a pas arrêté le $n^{ième}$ tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant est 0,6 .
- la probabilité pour qu'il arrête le premier tir est 0,7

Dans tout l'exercice, si *E* est un événement, on note *p(E)* la probabilité de *E, E*, l'événement contraire de *E*. On note *p(E/f)* la probabilité conditionnelle de l'événement *E* sachant que *F* est réalisé. A_n est l'événement "le gardien arrête le n^{ieme} tir". On a donc $p(A_1)= 0{,}7$.

1. a: Donnez pour $n \geq 1$ les valeurs de $p(A_{n+1} / A_n)$ et $p(\overline{A}_{n+1} / A_n)$
   b: Exprimez $p(A_{n+1} \cap A_n)$ et $p(A_{n+1} \cap \overline{A}_n)$ en fonction de $p(A_n)$
   c:Déduisez-en que, pour tout entier strictement positif n ^{3} 1 on a :$p(A_{n+1}) = 0{,}2\, p(A_n) + 0{,}6$.

2. On pose à présent, pour $n \geq 1$, $p_n = p(A_n)$ *et* $u_n = p_n - 0{,}75$
   a*:* Démontrez que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,2
   b:Déduisez-en une expression de p_n en fonction de n
   c:Montrez que (p_n) admet une limite que l'on calculera.

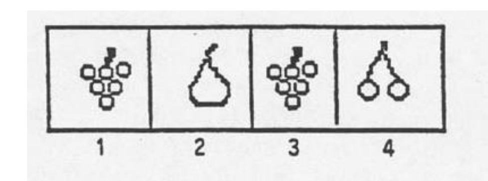
Exercice 15

Dans une salle de jeu un appareil comporte 4 roues, chacune portant à sa périphérie 8 images de fruits différents:

Ananas, Bananes, Cerises, Dattes, Fraises, Grosilles, Poires, Raisins.

Une mise de 1F déclenche le fonctionnement de l'appareil pour une partie.
Chacune des quatre roues affiche au hasard dans une fenêtre un de ces 8 fruits.

Exemple d'affichage :



On admettra que tous les événements élémentaires sont équiprobables.

1. Calculez la probabilité des événements suivants :
   E : on obtient quatre fruits identiques;
   F : on obtient trois fruits identiques et trois seulement;
   G : on obtient quatre fruits distincts.

Certains résultats permettent de gagner de l'argent :
50 F pour quatre fruits identiques;5 F pour trois fruits identiques;1 F pour quatre fruits distincts;
0 F pour les autres résultats.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque résultat associe le gain indiqué ci-dessus.
a: Quelle est la probabilité de l'événement "obtenir un gain non nul " ?
b: Déterminez l'espérance mathématique de X, notée E[X].
N.B. Les résultats seront donnés sous forme décimale avec

Exercice 16

Dans une population donnée, 15 % des individus ont une maladie M_a. Parmi les individus atteints de la maladie M_a, 20 % ont une maladie M_b et parmi les individus non atteints de la maladie M_a, 4 % ont la maladie M_b.

1. On prend un individu au hasard et on désigne respectivement par A et B les événements suivants :
   " l'individu est atteint de la maladie M_a "
   " l'individu est atteint de la maladie M_b"
   $\bar{A}$désigne l'événement contraire de A, P_A (B) désigne la probabilité de "B sachant A" c'est à dire la probabilité conditionnelle de B par rapport à A.
   a: Donnez les valeurs de p(A), p_A(B) et $p\bar{A}$ (B)
   b: Calculez p(B ∩A) et p(B ∩$\bar{A}$). Déduisez-en p(B)
   c: Calculez p_B(A)

On prend 10 individus au hasard dans cette population et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de ceux ayant la maladie M_a et la maladie M_b.
a:Quelle est la loi de probabilité de X ?

(Donnez, en fonction de k, la probabilité $P(X=k)$, où $O \leq k \leq 10$)

b: Déterminez la probabilité de l'événement "deux individus au plus sont atteints de la maladie M_a et la maladie M_b "

Dans cet exercice les résultats seront donnés sous forme décimale à 10^{-3} près.

Exercice 17

Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun deux sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième.

On note A_1 l'événement : " les deux sujets obtenus par le premier candidats proviennent du même examinateur" et A_2 l'événement : " les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur".On note $\overline{A}$ l'événement complémentaire de A.

1. Montrez que la probabilité de A_1 est $\frac{1}{19}$
   a) Calculez directement la probabilité : $p(A_2/A_1)$
   b) Montrez que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenant d'un même examinateur est égale à $\frac{1}{323}$

2. a)Calculez $p(A_2/\overline{A}_1)$
   b)Calculez $p(A_2)$ puis montrez que $p(A_1 \cup A_2) = \frac{33}{323}$

3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant choisi chacun deux sujets provenant d'un même examinateur. X prend donc les valeurs 0, 1 et 2.
   a)Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X
   b)Calculez l'espérance mathématiques de X

Exercice 18

Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 5 °/₀₀ (5 pour mille) de ce cheptel.

1. On choisit, au hasard, n bovins du cheptel et l'on désigne par X la variable aléatoire définie par le nombre de malades parmi ces n animaux.
   a)Si n = 10, calculez à 10^{-3} près, les probabilités suivantes : $P(X=0)$, $P(X$ ⊠ $1)$.
   b) Déterminez n pour que l'espérance mathématique de X soit égale à 0,10.
2. Des études statistiques ont montré que la probabilité pour un animal d'avoir un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8 % et que celle d'avoir un test négatif sachant qu'il

n'est pas atteint par la maladie est 0, 9.
On note :
T l'événement "avoir un test positif à cette maladie"
M l'événement "être malade"
M l'événement contraire de l'événement M
a)Montrez que : T = (M ⊠ T) ⊠ (M ⊠ T)
b) Calculez la probabilité pour un animal d'avoir un test positif à cette maladie
c) Calculez la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif.
On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.
Que peut-on conclure sur la fiabilité du test ?

Exercice 19

Une usine fabrique en série des boulons, la fabrication comporte 2 phases. 1ère phase fait apparaître un défaut"a" dans 2% des cas; la 2ème phase, un défaut "b" dans 10% des cas

1- un boulon est tiré au hasard
on définit les évènements suivants:
A "le boulon présente le défaut "a"
B " le boulon présente le défaut "b"

On suppose que les événement A et B sont indépendants

Calculer la probabilité des événements suivants:
C : " le boulon présente les 2 défauts"
D : " le boulon ne présente aucun des deux défauts"
E : " le boulon présente un et un seul des deux défauts"
2-Au cours de la fabrication on prélève au hasard, successivement 5 vélos. On admettra que le nombre de boulons fabriqués est assez grand pour estimer que la proportion de boulons défectueux reste constante au tirage.
Déterminer la probabilité de l'événement F"4 boulons au moins n'ont aucun défaut". On admettra la valeur exacte de cette probabilité, puis une valeur décimale approchée aux millièmes prés

Exercice 20

Pour un examen, dix examinateurs ont préparé chacun deux sujets. On dispose donc de vingt sujets que l'on place dans 20 enveloppes identiques. Deux candidats se présentent : chacun choisit au hasard deux sujets ; de plus les sujets choisis par le premier candidat ne seront plus disponibles pour le deuxième.
On note A_1 l'événement : " les deux sujets obtenus par le premier candidats proviennent du même examinateur" et A_2 l'événement : " les deux sujets obtenus par le deuxième candidat proviennent du même examinateur".On note $\overline{A}$ l'événement complémentaire de A.

1. Montrez que la probabilité de A_1 est $\frac{1}{19}$

   a) Calculez directement la probabilité : $p(A_2/A_1)$

   b) Montrez que la probabilité que les deux candidats obtiennent chacun deux sujets provenants d'un même examinateur est égale à $\frac{1}{323}$

2. a)Calculez $p(A_2/\overline{A_1})$

   b)Calculez $p(A_2)$ puis montrez que $p(A_1 \cup A_2) = \frac{33}{323}$

3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant choisi chacun deux sujets provenants d'un même examinateur. X prend donc les valeurs 0, 1 et 2.

   a)Déterminez la loi de probabilité de la variable aléatoire X

   b)Calculez l'espérance mathématiques de X

Exercice 21

Une urne contient 5 boules noires et 5 boules blanches.
On prélève *n* boules successivement et avec remise, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les deux événements suivants:

A:" On obtient des boules des deux couleurs";

B:" On obtient au plus une boule blanche ".

1:

a:: Calculez la probabilités de l'événement: "Toutes les boules titées sont de même couleur "
b: Calculez la probabilités de l'événement: "On obtient exactement une boule blanche".
c: Déduisez-en que les probabilités p(A et B) , p(A) et p(B) sont:

$$p(A \text{ et } B) = \frac{n}{2^n} \quad ; p(A) = 1 - \frac{1}{2^{(n-1)}} \quad ; p(B) = \frac{(n+1)}{2^n}$$

2: Montrez que p(A et B) = p(A).p(B) si et seulement si $2^{(n-1)} = n+1$.

3: Soit (Un) la suite définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 par: $Un= 2^{(n-1)} - (n+1)$

a: Calculez les trois premiers termes de cette suite.

b: Démontrez que cette suite est stritement décroissante.

4: Déduisez-en la valeur de l'entier n tel que les événements A et B soient indépendants

Exercice 23

Lors de la préparation d'un concours, un élève n'a étudié que 50 des 100 leçons. On a mis 100 papiers contenant chacun une question dans une urne, ces questions portant sur des leçons indépendantes.
Le candidat tire simultanément au hasard 2 papiers.
On donnera les réponses sous forme de fractions irréductibles.

1: Quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucun de ces sujets ?
2: Quelle est la probabilité qu'il connaisse les deux sujets ?
3: Quelle est la probabilité qu'il connaisse un et un seul de ces sujets ?
4: Quelle est la probabilité qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?

Partie II

On considère maintenant que l'élève a étudié n des 100 leçons (n étant un entier naturel inférieur ou égal à 100).
1: Quelle est la probabilité Pn qu'il connaisse au moins un de ces sujets ?
2: Déterminez les entiers n tels Pn soit supérieur ou égal à 0,95.

.

Exercice 24

1: Une urne U 1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2. Une urne U 2 contient 4 jetons numérotés 1 , 2 , 3 et 4.
On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne.(Les choix sont supposés équiprobables).
a: Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
b: On a tiré un jeton portant le numéro1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U 1 ?

2: On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents.
On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.
a: Calculez la probabilité de tirer 2 jetons identiques.
b: Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.
Déterminez la loi de probabilité de S.
c: Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros est impaire, Claude donne 10 euros à Dominique et que dans le cas contraire, Claude reçoit x euros de Dominique.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.
Calculez l'espérance mathématique de X en fonction de x, puis
déterminez x pour que le jeu soit équitable.

Exercice 25

Dans cet exercice, A et B étant deux événements, p(A) désigne la probabilité de A;
p(B/A) la probabilité de B sachant que A est réalisé.
1: Le nombre de clients se présentant en cinq minutes dans une station-service est une variable aléatoire X dont on donne la loi de probabilité:

$p_i = p(X = i)$ et $p_0 = 0,1$; $p_1 = 0,5$; $p_2 = 0,4$

a: Définir et représentez graphiquement la fonction de répartition de X.

b: Calculez l'espérance mathématique de X

2: Dans cette station service, la probabilité qu'un client achète de l'essence est 0,7; celle qu'il achète du gazole est 0,3. Son choix est indépendant des autres clients.

On considère les événements suivants:

C1 :" En cinq minutes, un seul client se présente" ;

C2 :" En cinq minutes, deux clients se présentent";

E :" En cinq minutes, un seul client achète de l'essence".

a: Calculer p(C1 et E).

b: Montrer que p(E / C2) = 0,42 et calculez p(C2 et E).

c: En déduire la probabilité qu'en cinq minutes un seul client achète de l'essence.

3: Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant de l'essence en cinq minutes.

Déterminer la loi de Y

Exercice 26

Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q.C.M) est utilisé.
On s'intéresse à cinq questions de ce (Q.C.M) supposées indépendantes.
A chaque question sont associées quatre affirmation, numérotées 1 , 2 , 3 et 4 , dont une seule est exacte. Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte. Sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.
Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme fractionnaire.

1: Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est à dire qu'il considère que les quatres affirmations correspondantes sont équiprobables.

a: Calculer la probabilités des événements suivants:

A: " Le candidat répond correctement à la première des cinq questions";

B: " Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq questions ".

b: On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note (-1) à toute réponse incorrecte.
Calculer la probabilité de l'événement C: " Le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions."

2: on suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse coreecte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions.

Quelle est alors la probabilité de l'événement C décrit en **1:b:** ?

Exercice 27

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On imagine n sacs de jetons S_1, S_2, ., S_n . Au départ, le sac S_1 contient 2 jetons noirs et 1 blanc, et chacun des autres sacs contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc. On se propose d'étudier l'évolution des tirages successifs d'un jeton de ces sacs, effectués de la façon suivante :

- Première étape : on tire au hasard un jeton de S_1 ;
- Deuxième étape : on place ce jeton dans S_2, et on tire, au hasard, un jeton de S_2 ;
- Troisième étape : après avoir placer dans S_3 le jeton sorti de S_2, on tire, au hasard, un jeton de S_3. et ainsi de suite.

Pour tout entier naturel k tel que $1\leq k \leq n$, On note E_k l'événement "le jeton tiré de S_k est blanc"

1:

a) Déterminez la probabilité de E1, notée P(E1), et les probabilités conditionnelles:

$$P(E_2 / E_1) \text{ et } P(E_2 / \overline{E_1})$$

Déduisez-en la probabilité de E_2, notée $P(E_2)$.

b) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de E_k est notée p_k.

Justifiez la relation de récurrence suivante :

$$p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$$

2: Etude d'une suite (u_k).

On note (u_k) la suite définie par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \\ \text{Pour tout entier } k \geq 1 \text{ , } u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3} \end{cases}$

a) On considère la suite (v_k) définie par, pour tout élément k de **N***, $v_k = u_k - 0{,}5$.

Démontrez que la suite (v_k) est une suite géométrique.

b) Déduisez-en l'expression de u_k en fonction de k.

Montrez que la suite (u_k) est convergente et précisez sa limite.

3: Dans cette question, on suppose que n = 10. Déterminez pour quelles valeur de k on a:

$$0{,}4999 \leq p_k \leq 0{,}5$$

<u>Exercice 28</u>

Dans une population donnée, 15 % des individus ont une maladie M_a. Parmi les individus atteints de la maladie M_a, 20 % ont une maladie M_b et parmi les individus non atteints de la maladie M_a, 4 % ont la maladie M_b.

1. On prend un individu au hasard et on désigne respectivement par A et B les événements suivants :

   " l'individu est atteint de la maladie M_a "

   " l'individu est atteint de la maladie M_b"

   $\overline{A}$ désigne l'événement contraire de A, P_A (B) désigne la probalité de "B sachant A" c'est à dire

la probalité conditionnelle de B par rapport à A.

a: Donnez les valeurs de $p(A)$, $p_A(B)$ et $p_{\bar{A}}(B)$

b: Calculez $p(B \cap A)$ et $p(B \cap \bar{A})$. Déduisez-en $p(B)$

c: Calculez $p_B(A)$

2. On prend 10 individus au hasard dans cette population et on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de ceux ayant la maladie M_a et la maladie M_b.

   a:Quelle est la loi de probabilité de X ?

   (Donnez, en fonction de k, la probailité $P(X=k)$, où $O \leq k \leq 10$)

   b: Déterminez la probabilité de l'événement "deux individus au plus sont atteints de la maladie

   M_a et la maladie M_b"

Dans cet exercice les résultats seront donnés sous forme décimale à 10^{-3} près.

COMPLEXE AU BAC TS_1

EXERCICE1

Dans le plan complexe, on considère les points : A d'affixe $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$, B d'affixe 2i, M d'affixe z, $z \neq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

Soit $z' = \frac{z - 2i}{2z - 1 - i}$.

1. Déterminer et construire l'ensemble des points M tel que z' soit réel.
2. Déterminer et construire l'ensemble des points M tel que z' soit imaginaire pur.
3. Déterminer et construire l'ensemble des points M tel qu'un argument de z' soit égal à $\frac{3\pi}{2}$.

EXERCICE 2

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

(E) : $z^3 - (6 + 4i)z^2 + (8 + 14i)z - 12i = 0$

1. Montrer que (E) admet une unique solution réelle.
2. résoudre (E) dans C.

On note z_1 la solution réelle, z_2 et z_3 les deux autres solutions avec $|z_1| \prec |z_3|$. On considère les points M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 .

Déterminer la similitude directe de centre M_2 qui transforme M_1 en M_3 :

Donner ses éléments caractéristiques.

EXERCICE3

Soit $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$

1. Calculer P(1 + i).
2. Comparer $P(\overline{z})$ et $\overline{P(z)}$.
3. Montrer que si z_0 est racine de P alors $\overline{z_0}$ est aussi racine de P.
4. Montrer que si z_0 est racine de P alors $\frac{1}{z_0}$ est aussi racine de P.
5. Déterminer toutes les racines de P.

EXERCICE 4

θ désigne un nombre réel appartenant à $[0, 2\pi[$.

1. Résoudre dans C l'équation d'inconnue z : $z^2 - (2^{\theta+1}\cos\theta)z + 2^{2\theta} = 0$. Donner chaque solution sous forme trigonométrique.
2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B dont les affixes sont les solutions de l'équation précédentes. Déterminer θ de manière à ce que OAB soit un triangle équilatérale.

EXERCICE 5

Soit z_0 le complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{5}$.

1. Montrer que z_0 est solution de l'équation $z^5 - 1 = 0$.
2. Simplifier l'écriture de : $(z - 1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$.
3. En déduire que z_0 est solution de l'équation : $(z^2 + \frac{1}{z^2}) + (z + \frac{1}{z}) + 1 = 0$.
4. On suppose que $Z = z + \frac{1}{z}$.

Montrer que Z vérifie une équation du second degré (E) dont déterminera les solutions.

5. En déduire z_0 puis la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.

EXERCICE 6

Soit A et B les points du plan complexe d'affixes respectives :

$z_A = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\,i$ et $z_B = -2 + 2\sqrt{3}\,i$.

1. Calculer le module et un argument des complexes z_A et z_B.
2. Faire une figure que l'on complétera au fur et à mesure.
3. Soit M le point du plan complexe d'affixe $z = z_A + z_B$
   a. Quelle est la nature du quadrilatère OAMB ?
   b. En déduire un argument de z.
   c. Calculer $|z|$.
   d. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\frac{5\pi}{24}$ et $\sin\frac{5\pi}{24}$.

EXERCICE 7

On considère la suite de nombres complexes $(z_n)_{n \in IN}$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} z_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{3}} z_n + 2 \\ z_0 = 2 \end{cases}$$

1. Ecrire sous forme algébrique z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5.
2. On note respectivement M_0, M_1, M_2, M_3 M_4et M_5 les points d'affixes respectifs z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5. Placer les points $(u_n)_{n \in IN}$ dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal.
3. Soit $(u_n)_{n \in IN}$ la suite complexe définie pour tout entier naturel, par $u_n = z_n - 1 - i\sqrt{3}$.

Monter que la suite $(u_n)_{n \in IN}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

4. En déduire u_n puis z_n en fonction de n.
5. Montrer que les points M_1, M_2, M_3 M_4et M_5 sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

EXERCICE 8

Soit $P(z) = z^3 - 4z^2 + 8z - 8$ ou z est une variable complexe.

1. a. Calculer P(2).

b. Résoudre alors P(z) = 0.

2. On considère les complexes $z_1 = 2$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.
   a. Calculer le module et un argument de chacun de ces trois complexes.

b. Ecrire le quotient $\frac{z_3}{z_2}$ sous la forme trigonométrique ; puis la forme algébrique.

3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u};\vec{v}$), on considère les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3.
   a. Montrer que M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Placer ces points.
   b. Montrer qu'il existe une rotation de centre O qui transforme M_2 en M_3. Donner une mesure, en radian, de l'angle de cette rotation.
   c. Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle.

EXERCICE 9

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u};\vec{v})$; unité graphique 2cm.
On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives *a* = 1 et *b* = -1.
On considère l'application *f* qui, à tout point M différent du point B, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par

$$z' = \frac{z-1}{z+1}$$

On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.
1. Déterminer les points invariants de *f* c'est-à-dire les points M tels que M = *f*(M).
2. a) Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de -1, (z' - l)(z +1) = - 2.
b) En déduire une relation entre | z'-1 | et | z + l | , puis entre arg(z'-l) et arg (z + l), pour tout nombre complexe z différent de -1.
Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2, alors M ' appartient au cercle (C ') de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe p = - 2 + $i\sqrt{3}$.
a) Déterminer la forme exponentielle de (p + 1).
b) Montrer que le point P appartient au cercle (C).
c) Soit Q le point d'affixe q = - $\bar{p}$ où $\bar{p}$ est le conjugué de p. Montrer que les points A, P'et Q sont alignés.
d) En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P ' du point P par l'application *f*.

EXERCICE 10

Partie A

Le plan IP est rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u};\vec{v}$), (unité graphique : 2cm On considère les points E, F et G d'affixes respectives :
$z_E = 1 + i\sqrt{3}$; $z_F = 2$ et $z_G = 3 + i\sqrt{3}$.

1. Ecrire z_E , z_F et z_G sous forme trigonométrique.
2. Placer les points E, F et G dans IP.
3. montrer que le triangle EFG est équilatéral. Le tracer.
4. Montrer que le point I (2 ; $\frac{4\sqrt{3}}{3}$) est le centre du cercle ζ circonscrit au triangle EFG.

   Tracer ζ.

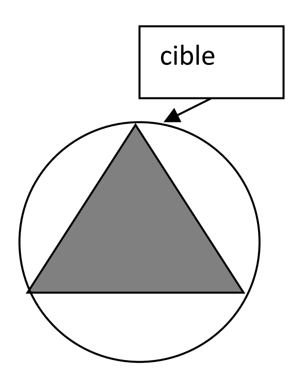
Partie B

On considère que le disque déterminé par ζ forme une cible décomposée en deux zones :

- Une zone triangulaire noire nommée N.

- Une zone blanche nommée B.

On suppose que la probabilité, pour un tireur d'atteindre N est 0,5 et celle de rater la cible est 0,2.



1. a. quelle est la probabilité d'atteindre la cible ?

b. quelle est la probabilité d'atteindre B ?

2. On considère un tireur qui tire deux fois sur la cible.
   S'il atteint B, il gagne 5 euros ; s'il atteint N, il gagne 2 euros.
   S'il rate la cible, il doit payer 8 euros.
   Soit X la variable aléatoire qui à chaque tir associe le gain correspondant (positif ou négatif).
   a. Définir la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X. le jeu est il équiprobable ?
   c. Calculer la valeur arrondie à 10^{-2} de l'écart type de X.

EXERCICE 11

1. Montrer que $(1 + i)^6 = -8i$.
2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.
   a. Déduire de 1. une solution de l'équation (E).
   b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Déduire également de 1. une solution de l'équation (E') $z^3 = -8i$.
4. On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
   a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi l'affixe c du point C, image de B par r.
   b. Montrer que b et c sont solution de (E').
   c. Montrer que l'image de C par r est A
5. a. Dans Le plan complexe rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u};\vec{v}$), (unité graphique : 2cm), représenter les points A, B et C .
   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

EXERCICE 12

Le plan IP est rapporté au repère orthonormal (O ; $\vec{u};\vec{v}$), (unité graphique : 2cm)

On considère la transformation F du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i)z + 2$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de F.
2. Soit A le point d'affixe $-2 + 2i$. Déterminer les affixes des points A' et B vérifiant respectivement : A' = F(A) et F(B) = A.
3. Soit ω l'affixe du point invariant Ω par F

a. établir que pour tout complexe z distinct de ω, $\frac{z'-z}{\omega-z} = -i$

b. Soit M un point distinct de déterminer la nature du triangle ΩMM'.

4. a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z+2-2i| = \sqrt{2}$. Vérifier que B est un point de Γ.

c. Déterminer la nature et les élément caractéristiques de Γ' l'image de Γ par F.

EXERCICE 13

Soit f l'application de E= C- $\{-i\}$ dans C définie par $z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal

(O ; $\vec{u};\vec{v}$) on note M le point d'affixe z.

1. Déterminer les coordonnées du point B dont l'affixe z_0 est telle que $f(z_0) = 1 + 2i$.
2. Soi z un élément de E. On note r le module de z + i et α une mesure de son argument.

Exprimer la forme trigonométrique de f(z) – i en fonction de r et de α.

3. Soit A point d'affixe –i .

a. Déterminer l'ensemble ζ des points M vérifiant $|f(z)-i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble Δ des points M tel que $\frac{\pi}{4}$ soit une mesure de l'argument de f(z) – i.

b. Montrer que B appartient à ζ et à Δ et construire ζ et Δ.

EXERCICE 14

Soit α un nombre réel appartenant à $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$. On considère l'équation d'inconnue complexe z : (E) $(1+iz)^3(1 - i\tan\alpha) = (1-iz)^3(1+ i\tan\alpha)$.

1. Soit z une solution de (E).

a. montrer que $|1+iz| = |1-iz|$.

b. En déduire que z est réel.

2. a. Exprimer $\frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

b. Soit z un nombre réel ; on pose z = tanψ où $\psi \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$.

Ecrire l'équation portant sur ψ traduisant (E) et la résoudre.

c. Déterminer les solutions z_1,z_2, et z_3 de (E).

EXERCICE 15

Dans l'ensemble des nombres complexes, on considère l'équation :

(E) : $z^3 + (1- 8i)z^2 - (23+ 4i)z -3 +24i = 0$

1. a. Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure et la déterminer ;

b. Achever la résolution de l'équation (E) .

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal directe, représenter les point A , B et C d'affixes respectives 1 + 2i, 3i, -2 + 3i.

Soit G le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 2, -2, 1.

Déterminer puis écrire sous la forme trigonométrique les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$.

Montrer qu'elles forment une suite géométrique dont on déterminera la raison complexe.

En déduire qu'il existe une similitude directe qui transforme A en B et B en C. Donner les éléments caractéristiques de cette similitude.

EXERCICE 16

Soient dans le plan complexe, trois points A, B, C d'affixes a, b, c non nulles et trois points P, Q, R d'affixes respectives : $p = \frac{|a|}{a}$ $q = \frac{|b|}{b}$ $r = \frac{|c|}{c}$

1. Soit H le point défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$
   a. Montrer que H est l'orthocentre du triangle PQR.
   b. Montrer que le triangle PQR est équilatéral si et seulement si l'on a : $p + q + r = 0$
2. On suppose dans cette question $p + q + r = 0$
   a. Soit z un nombre complexe. Comparer les réels S_1 et S_2 :

$S_1 = |z-a| + |z-b| + |z-c|$ $S_2 = |p(z-a) + q(z-b) + r(z-c)|$

En déduire que, pour tout z, on a : $|z-a| + |z-b| + |z-c| \geq |a| + |b| + |c|$

   b. Montrer qu'il existe un point M du plan tel que MA + MB + MC soit minimal

EXERCICE 17

Dans un plan complexe orienté on désigne par A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, c soit j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Soit R la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Démontrer que quel que soit le point M d'affixe z, son image R(M) a pour affixe $-j^2z - jc$.
2. Déduisez- en que , pour que le triangle ABC soit équilatéral il faut et suffit que l'on ait : $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$
3. Déterminer z pour que le triangle dont les sommets ont pour affixes respectives i, z, iz soit un triangle équilatéral.

EXERCICE 18

Soit $f_\lambda = \lambda z + i$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$; $z' = f_\lambda(z)$; F_λ : $M(z) \mapsto M'(z')$

1. déterminer la nature de F_λ, suivant les valeurs de λ.
2. Soit S_λ la suite : $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$, $n \mapsto z_n$ définie par : $z_0 = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = f_\lambda(z_n)$.
   a. Calculer z_n en fonction de λ ; étudier en particulier les cas $\lambda = 1$; $\lambda = -1$.
   b. Préciser une condition portant sur λ, pour que S_λ soit périodique. Préciser la période.
   c. Démontrer :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+2} = (1+\lambda)z_{n+1} - \lambda z_n$

Démontrer que toute suite complexe définie par : $z_0 = 0$, $z_1 = i$, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+2} = (1+\lambda)z_{n+1} - \lambda z_n$, est S_λ.

3. Soit r et θ réels, $r \succ 0$, $0 \prec \theta \prec \frac{\pi}{2}$ et u le complexe de module r et d'argument θ. Soit dans IP la suite de points (A_n) telle que $A_0 = O$; A_1 a pour affixe i ; pout tout n de IN, A_{n+2} est l'image de A_{n+1} par la similitude de centre A_n et rapport r, d'angle θ. Soit z_n l'affixe de A_n . Ecrire une relation entre z_n, z_{n+1} et z_{n+2}.

Démontrer que A_{n+2} est l'image de A_n par une similitude S indépendante de n ; préciser les élément de S.

4. Préciser S lorsque r = $2\cos\theta$. Dans ce cas la suite A_n peut elle être périodique ?
5. soit r = $\dfrac{1}{\cos\theta}$. Préciser les éléments de S. Démontrer que tous les points A_n sont sur l'une ou l'autre de deux droites orthogonales, et que les vecteurs $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ *et* $\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}$ sont orthogonaux. Représenter les points A_0 à A_5 pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

EXERCICE 19

Le plan est rapporté à un repére orthonormé direct (O ; $\vec{u},\vec{v}$) (unité graphique :1cm)

Partie A

Dans le repère (O ; $\vec{u},\vec{v}$), on considère la courbe ζ d'équation : $y^2 - x^2 = 16$.

1. Montrer que ζ est la réunion de deux courbes Ψ et Ψ ' ou Ψ est la courbe représentative de la fonction définie sur IR par f(x) = $\sqrt{x^2+16}$ et où Ψ ' est l'image de Ψ par une transformation simple que l'on précisera.
2. Etudier la fonction f (limites aux bornes de Df et sens de variation).
3. a. Montrer que la droite d'équation y = x est une asymptote de Ψ .

   b. Tracer ζ dans le repère (O ; $\vec{u},\vec{v}$).
4. On nomme A et B les points de la courbe Ψ d'abscisse respectives -3 et 3. On considère le domaine D du plan constitué des points M(x ;y) vérifiant :

$-3 \le x \le 3$ *et* $\sqrt{x^2+16} \le y \le 5$.

Hachurer le domaine D et exprimer l'aire de D à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

1. a. Donner l'écriture complexe de r.

b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M' image du point M(x ;y) du plan.

Vérifier que $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) \end{cases}$

Déterminer les coordonnées des points A' et B', images respectives de A et B par la rotation r. Placer les points A' et B' dans le repère (O ; $\vec{u},\vec{v}$).

2. Soit ζ ' l'hyperbole d'équation xy = 8.
   a. Tracer ζ ' dans le repère (O ; $\vec{u},\vec{v}$).
   b. Montrer que ζ ' est l'image de ζ par la rotation r
3. Soit D' l'image de D par la rotation r. on admet que D' est l'ensemble des points M(x ;y) du plan vérifiant : $\sqrt{2} \le x \le 4\sqrt{2}$ *et* $\dfrac{8}{x} \le y \le 5\sqrt{2} - x$.
   a. Hachurer D'.
   b. Calculer l'aire de D', exprimée en cm^2. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} prés de l'aire de D.

EXERCICE 20

Soit IP plan affine rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{i}\,\vec{j}$) et IP* le plan IP privé du point O.

soit f : C* $\rightarrow$ C*, z $\mapsto \frac{1}{z^2}$; f(z) = z'. soit F : IP* $\mapsto$ IP*, M(z) $\mapsto$ M(z').

Partie A

1. soit z $\neq$ 0, r = $|z|$, θ = Argz. Démontrer : z' = $\frac{1}{r^2}(\cos 2\theta - i\sin 2\theta)$.
2. a. f est –elle surjective ? injective ?

b. Etudier l'équation : f(z) = z.

c. Représenter les points invariants par F..

3. pour $|z|$ = 1, construire l'image par F d'un point M(z). pour $|z'|$, représenter les points M(z) d'image M'(z') par F.
4. Soit D une demi-droite d'origine O ; D* désigne D privée de O. Construire l'image par F de D*. Construire l'image par F d'une droite passant par O, privée de O.
5. Soit Δ une droite passant par O ; Δ* désigne Δ privée de O. Déterùminer l'ensemble des points M tels que F(M) $\in \Delta$*

Partie B Soit Γ l'ensemble des points de IP* d'affixe : z = -2cos$^2\theta$ - 2isinθcosθ,

$\frac{\pi}{2} \prec \theta \prec \frac{3\pi}{2}$.

1. Démontrer que Γ est inclus dans un cercle passant par O .
2. Préciser, en fonction de θ, le module et un argument de z, affixe d'un point M de Γ.

Exprimer, en fonction de tgθ, les coordonnées (x' ;y') de M' = F(M). En déduire l'équation et la nature de Γ'= F(Γ). Vérifier que les points I et J de Γ, d'argument respectifs $\frac{2\pi}{3}$ *et* $\frac{4\pi}{3}$, sont sur Γ'. Expliquer ce résultat. Construire Γ'.

exerice1

I) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $\ln(x+e)=2$

2) $\ln(x+1)+\ln(x+2)=\ln(x+11)$

3) $2\ln^3(x)-9\ln^2(x)-2\ln(x)+9=0$

4) $\ln(2x+8)-\ln(3x+2)=\ln(x+1)$

5) $\ln(x^2-x-1)$

6) $\ln(x+3)-\ln(x-5)=\ln 15$

7) $\ln\sqrt{2x-3}=\ln(6-x)-\dfrac{1}{2}\ln x$

8) $\ln|2x-5|-\ln|2x+2|=\ln|x+1|$

9) $\ln^2 x-7\ln x+6=0$

10) $\ln(x+2)+\ln(x-2)=\ln 5+2\ln 3$

11) $\log x+\log(3-x)=\log 5$

12) $\log_3\sqrt{x}+\dfrac{1}{2}+\log_9(4x+15)=0$

II) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $\ln x+\ln(x+2)>\ln(x^2-2x+2)$

2) $\ln(2-x)+\ln(x+4)\geq\ln(3x+2)$

3) $\ln(\ln x))>0$

4) $\ln^2 x-3\ln x-4<0$

5) $(1-\ln x)(2+\ln x)\leq 0$

6) $\ln(x^2-10x+9)\geq\ln(3x-27)$

III) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}2\ln(x-2)+\ln y=1\\5\ln(x-2)+3\ln y=4\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+y^2=29\\\ln(x)+\ln y=\ln 10\end{cases}$

3) $\begin{cases}x+y=25\\\ln(x)+\ln y=2\ln 12\end{cases}$

4) $\begin{cases}\ln(x)+\ln y^2=4\\\ln^2(x)-3\ln xy=-5\end{cases}$

5) $\begin{cases}x+y=7\\\log x+\log y=1\end{cases}$

6) $\begin{cases}xy=243\\5\log_x y+3\log_y x=\dfrac{17}{4}\end{cases}$

7) $\begin{cases}2^{x+1}-3\log_2 y=-11\\2^{x+2}+7\log_2 y=43\end{cases}$

Exercice 2

Étudier et représenter graphiquement les fonctions suivantes :

1) $f(x)=\ln(x^2-2x+1)$

2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

3) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

4) $\ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$

5) $\ln(\ln x)$

6) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}+\ln|x-1|$

Exercice 3

On considère la fonction g définie par : $\begin{cases}g(x)=x(1-\ln x)^2 \quad si \quad x>0\\g(0)=0\end{cases}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Étudier la continuité et la dérivabilité de $g$sur son ensemble de définition.

b) Étudier les variations de g puis tracer la courbe$(\mathscr{C})$.

2 a) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite $(\Delta): y=x$.

b) Pour quelles valeurs de m la droite $(\Delta_m) : y = mx$ recoupe-t-elle $(\mathscr{C})$ en deux points et autres que le point 0.

c) La droite (Δ_m) coupe la droite $(D) : x = e$ en P .Montrer que $OM_1 OM_2 = OP^2$.

3) a) Montrer que la restriction h de la fonction gà $[e;+\infty[$ admet une bijection réciproque h^{-1}dont on précisera l'ensemble de définition.

b) Sur ensemble h^{-1} est-elle dérivable ? Calculer $h(e^2)$ puis $(h^{-1})'(e^2)$.

c) Tracer la courbe $(\mathscr{C}_{h^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice 4

I) Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = 1 + x + \ln x$.

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;+\infty[$ solution de l'équation $g(x) = 0$. Vérifier que $\alpha \in]0,2;0,3[$.

3) En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.

4) Établir la relation $\ln(\alpha) = -1 - \alpha$

II) On considère la fonction f définie $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x \ln x}{1+x}$

1) Montrer que f est continue en 0 puis sur $]0;+\infty[$.

2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 0^+.

3) Montrer que, quel que soit x élément de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^2}$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

4) Montrer que $f(\alpha) = -\alpha$.

5) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

6) Représenter la courbe de f dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Unité graphique : 5 cm. Prendre $\alpha \approx 0,3$.

7) a) Montrer que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ admet une solution unique $U_n \in]\alpha;+\infty[$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(e^n) < n$ .En déduire que $U_n > e^n$ et déterminer la limite de (U_n).

c) Montrer que $\ln\left(\dfrac{U_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{U_n}$. En Déduire la limite de la suite $\left(\dfrac{n}{U_n}\right)$ puis celle de $\left(\dfrac{U_n}{e^n}\right)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x} & si \quad x \in]-\infty;1] \\ f(x) = 1 - (\ln x)^2 & si \quad x \in]1;+\infty[\end{cases}$$

On désigne par sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f.

   b) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 1.

2) a) Montrer que la courbe $(\mathscr{C}_f)$ admet en $-\infty$ une asymptote oblique (D) dont on précisera l'équation.

   b) Étudier la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (D) sur l'intervalle $]-\infty;1]$.

3) Calculer $f'(x)$ sur chaque intervalle où f puis établir le tableau de variation de f.

4) Démontrer que le point $I(e;0)$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

5) Tracer $(\mathscr{C}_f)$ et la droite (D).

6) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1;+\infty[$;

   a) Montrer que g est une bijection de $]1;+\infty[$ vers un intervalle J à préciser.

   b) g^{-1} est-elle dérivable sur J ? Calculer $\left(g^{-1}\right)'(0)$.

   c) Tracer $(\mathscr{C}_{g^{-1}})$ dans ce même repère.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = x\ln^n(x) & si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.(Unité =5 cm)

1) Étudier les variations de f_1 et tracer $(\mathscr{C}_1)$.

2) Étudier les variations de f_n pour $n \in \mathbb{N}$.

3) Démontrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_n)$ passent par trois points fixes.

4) Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C}_n)$ et $(\mathscr{C}_{n+1})$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

' Exercice 7

A-) On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{x^2+1}$

1-) a-) Calculer $g'(x)$ puis montrer que pour tout$\in]0;+\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x(x^2+1)^2}$.

b-) Étudier le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

2) Déterminer les limites de $g(x)$ en $+\infty$ et en 0^+ .

3) a) Établir le tableau de variation de g .

   b) En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Vérifier $0,5 < \alpha < 0,6$.

4) Déduire des questions précédentes le signe $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

B-) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$: $\begin{cases} x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) & si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité 5 cm)

1) a) Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$ $f'(x) = g(x)$.

b) En déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x)$. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3) a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 0$.

b) Étudier la dérivabilité de f en 0. Préciser la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ $x = 0$.

4) a) Prouver que pour tout $x \in [0,5;\alpha]$, $0 \leq f'(x) \leq f'(0,5)$.

b) En déduire que pour $x \in [0,5;\alpha]$, $0 \leq f(\alpha) - f(0,5) \leq (\alpha - 0,5)f(0,5)$;
puis $0 \leq f(\alpha) - f(0,5) \leq \frac{1}{10} f(0,5)$

c) En déduire une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-3}.

5) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = -\frac{x}{2} + \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|$ et désigne par $(\mathscr{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2 cm)

1-) Déterminer l'ensemble de définition de f puis calculer les limites aux bornes.

2-) Étudier les variations de f et dresser le tableau de variation de f.

3-) Montrer que la droite $(\Delta) : y = -\frac{x}{2}$ est une asymptote à $(\mathscr{C}_f)$ puis préciser la position relative de $(\mathscr{C}_f)$ par rapport à (Δ).

4-) Montrer que le point $I\left(0;-\frac{1}{4}\right)$ est un centre de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

5-) Déterminer une équation de la tangente en I à $(\mathscr{C}_f)$

6-) Construire la courbe $\mathscr{C}_f$.

7-) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\frac{2}{5} \leq \alpha \leq \frac{9}{20}$

Exercice 9

Soit f la fonction définie de $[0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x \ln x \quad si \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

I-) 1-) Étudier les variations de f puis tracer sa courbe représentative.

2-) Démontrer qu'il existe un unique $\alpha \in]1;e[$ réel tel que : $f(\alpha) = \frac{1}{e}$ Donner une valeur approchée de α à 0,01 près .

II-) Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 \in]0;+\infty[$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

1-) Déterminer U_0 pour que la suite (U_n) soit constante.

2-) On choisit $U_n \in \left]0;\frac{1}{e}\right[$. Démontrer que :

a-) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < \frac{1}{e}$;

b-) la suite (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$;

c-) (U_n) converge vers $\frac{1}{e}\cdot$

3-) On choisit : $U_n > e$. Démontrer que :

a-) la suite (U_n) est strictement croissante ;

b-) $\forall x \in]e;+\infty[$, $f'(x) \geq 2$

c-) $\forall n \in \mathbb{N}$; $\quad U_n - U_n \geq 2(U_n - U_{n-1})$

d-) $\forall n \in \mathbb{N}$; $\quad U_n - U_n \geq 2^n(U_1 - U_0)$ En déduire la limite de la suite (U_n)

Exercice 10

Soit m un réel strictement positif et $f_m(x) = \ln(mx) + \frac{m}{\ln x}\cdot$ On désigne par $\mathscr{C}_m$ la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1-) a-) Étudier l'ensemble de définition de f_m et étudier les branches infinies de $\mathscr{C}_m$

b-) Déterminer la dérivée de f_m et démontrer que l'ensemble des extremums de lorsque m décrit, est la courbe (Γ) d'équation $y = 2\ln(x|\ln x|)$

c-) Étudier la fonction $h(x) = 2\ln(x|\ln x|)$ et tracer (Γ)

Dans la suite du problème on suppose $m = 1$.

2-) a-) Étudier la fonction f_1 et tracer $\mathscr{C}_1$

b-) On désigne par g la restriction de f_1 à $[e;+\infty[$. Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. Tracer la courbe de g^{-1}

3-) a-) Démontrer que (C) $\mathscr{C}_1$admet un point d'inflexion dont l'abscisse α est solution de l'équation : $(\ln x)^3 - \ln x - 2 = 0$

b-) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 11

A) On considère pour tout entier strictement positif n la fonction f_n définie par : $f_n(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \ln|x-1|$.

Le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité graphique 2 cm). On note $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de f_n dans ce repère.

1) a) Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition

b) Étudier les branches infinies de $\mathscr{C}_n$. (On distinguera les cas $n = 1$, n impair différent de 1 et n pair)

2) a) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et que pour tout $n \neq 1$,$f_n'(x) = \frac{x^n}{x-1}$

b) Étudier le sens de variation de f_n et dresser le tableau de variation de f_n (On distinguera les cas n impair et n pair).

3) a) Calculer la dérivée seconde de f_n .

Étudier l'ensemble des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_n$. (On distinguera les cas $n = 1$, n impair différent de 1 et n pair).

b) Pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2 , on note T_n la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse $\dfrac{n}{n-1}$.

Tracer les courbes $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ainsi que les tangentes T_2 et T_3 .

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul , il existe un unique réel α_n tel que $f_n(\alpha_n) = 0$.

b) Vérifier que pour tout entier $n > 1$ on a :

$$f_{n-1}(\alpha_n) = -\frac{1}{n}\alpha_n^n \quad et \quad -\frac{1}{n}\alpha_n^n < f_{n-1}(\alpha_{n-1})$$

En déduire que la suite (α_n)est strictement monotone et convergente .

c) Démontrer que pour tout entier naturel non nul , p on a :

$$\frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$$

Vérifier alors que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > 0$

d) En déduire que : $\alpha_n < 1 + \frac{1}{n}$. Calculer alors la limite de la suite (α_n) .

B) 1) Montrer que : $\forall x < 1$,$f_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{t-1}dt$ et $\forall x > 1$, $f_n(x) = \displaystyle\int_{\alpha_n}^x \frac{t^n}{t-1}dt$.

2) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|f_n(-1)| \leq \displaystyle\int_{-1}^0 (-t)^n dt$; calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(-1)$.

3) Déterminer la limite de la suite $(V_n)_{n>0}$ définie par :

$$V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Exercice 12 Partie A

Soit f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f_a(x) = x + 1 + \frac{a}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ où a est un réel non nul. On note $\mathscr{C}_a$ la courbe représentative de f_a dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité=1 cm).

1) Déterminer l'ensemble de définition Df_a de f_a puis calculer les limites de f_a à ses bornes.

2) a) Prouver que toutes les courbes $\mathscr{C}_a$ passent par un même point fixe I dont on déterminera les coordonnées.

b) Démontrer que le point I est centre de symétrie de toutes les courbes .$\mathscr{C}_a$

3) Déterminer les asymptotes de $\mathscr{C}_a$ puis étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_a$ par rapport à son asymptote oblique Δ.

4) Vérifier que f_a est dérivable dans Df_a et calculer f_a' pour tout

5) Soit g_a le trinôme défini pour tout réel x par : $g_a = x^2 + a - 1$

a) Résoudre, suivant les valeurs de a , l'équation $g_a(x) = 0$

b) Dans le cas où l'équation $g_a(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes, on note x_1 la solution strictement positive.
Déterminer en fonction de a le signe de $1 - x_1$.

c) Étudier suivants les valeurs sur paramètre réel strictement négatif, les variations de f_a .

6) Tracer la courbe $\mathscr{C}_{-1}$ dans le repère

Partie B

Soit b un élément de $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et φ_b l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(x;y)$ d'affixe z associe le point $M'(x';y')$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{2}[1 - b + i(1+b)]z + \frac{1}{2}[1+b]\bar{z} + i(1+b)$$

où $\bar{z}$ est le conjugué de z .

1) a) Écrire x' et y' en fonction de x, y et b .

b) Démontrer que l'ensemble des points invariants par φ_b est la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$.

c) Démontrer que si M n'est pas un point de (Δ) alors la droite est (MM') parallèle à une direction fixe .

d) Soit M_0 le point de (Δ) ayant même abscisse que M.
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{M_0M'}$ en fonction $\overrightarrow{M_0M'}$.

2) a) Démontrer que pour tout $b \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ et tout $a \in \mathbb{R}^*$,$\varphi_b(\mathscr{C}_a) = (\mathscr{C}_{-ab})$.

b) En déduire une construction géométrique simple de $(\mathscr{C}_{-3})$ point par point à partir de $(\mathscr{C}_{-1})$ dans le repère.

Partie C

Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$ et $A(\lambda)$ l'aire du domaine délimité par $(\mathscr{C}_a)$, $(\mathscr{C}_{a+2})$ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$ dans le repère R.

1-) En utilisant une intégration par parties, calculer $A(\lambda)$ puis déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 1} A(\lambda)$.

2-) On considère la fonction h définie pour tout élément de $[0;1[$ par $h(x) = -\ln\left(1 + \frac{2x}{1-x}\right)$ et la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $s_n = -\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} h\left(\frac{p}{n}\right)$

a-) Déterminer le sens de variation de h sur $[0;1]$ puis prouver que pour tout entier naturel p vérifiant : $0 \leq p \leq n-2$ on a :

$$\frac{1}{n}h\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h(x)dx \leq \frac{1}{n}h\left(\frac{p}{n}\right)$$

b-) En déduire que :

$$s_n + \frac{1}{n}h\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq A\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq s_n$$

et

$$A\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq s_n \leq A\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}h\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

c-) Déduire de 1-) que $\lim_{n\to+\infty} s_n = \ln 4$.

Exercice 14

Soit x un réel donné de $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$; on pose pour tout entier naturel $(n;n+1)$;

$$S_n(x) = \ln(2\cos\frac{x}{3}-1) + \ln(2\cos\frac{x}{3^2}-1) + \cdots + \ln(2\cos\frac{x}{3^n}-1)$$

1) Vérifier que pour tout $(n;n+1)$, $2\cos\frac{\varphi}{3^n} - 1 > 0$. En déduire la suite $(S_n(x))$ est donc bien définie.

2) Montrer que pour tout réel φ ; $\cos 3\varphi = (2\cos 2\varphi - 1)\cos\varphi$.
Déduisez en que $S_n(x) = \ln(\cos\frac{x}{2}) - \ln(\cos\frac{x}{2.3^n})$· Déterminer la limite notée $S(x)$, de la suite (S_n).

Exercice 15

1) Déterminer les primitives des fonctions sur I

a) $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ $\quad I =]0;\frac{\pi}{2}[$ **b)** $g(x) = \frac{x+3}{x^2+6x+5}$ $\quad I =]0;+\infty[$

c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\quad I =]0;+\infty[$ **d)** $u(x) = \tan x$ $\quad I =]0;\frac{\pi}{2}[$

e) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ $\quad I =]0;\frac{\pi}{2}[$

2) Déterminer trois nombres réels a , b et c tel que : $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x+1)^2} = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}$ $I =]-1;\infty[$.
Déduisez-en une primitive de f sur $I =]-1;\infty[$

Problème 1

On se propose d'étudier la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + \frac{1+\ln x}{x}$$

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Unité 2 cm on désigne par (C) la courbe représentative de f dans ce repère.

Partie : A On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty$ par $g(x) = x^2 - 2\ln x$

1. Étudier le sens de variation de g.(Les limites de g en zéro et en plus l'infini ne sont pas demandées).

2. En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$. (On ne demande pas pas de construire la courbe représentative de g).

Partie : B **1.** Calculer la limite de f en zéro, quelle est la conséquence graphique de ce résultat ?

2. Calculer la limite de f en plus l'infini.

3. **a.** Montrer que : $\forall\ x \in]0;+\infty[\ ;\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{2x^2}$

   b. En déduire le sens de variation de f (on utilisera les résultats de la partie A).

4. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ est asymptote à (C) ; étudier la position de (C) par rapport (D).

5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 sur $]0;+\infty[$ et que x_0 est un réel de l'intervalle $]0.2;0.3[$. Interpréter graphiquement ce résultat.

6. Construire la courbe (C) et la droite (D).

7. **a.** Donner une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction h définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

   b. Calculer, en cm^2, l'aire Φ de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations : $x = \dfrac{1}{e}$ et $x = e$

Problème 2

Soit f la fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & si \quad x \leq 0 \\ x\ln x - x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

A) **1.** Préciser l'ensemble de définition E.

2. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition E.

3. On désigne par (C), la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

   a. Étudier les branches infinies de (C).

   b. Tracer une équation cartésienne de la droite (T) tangent à (C) en son point d'abscisse $x = -2$

   c. Calculer $f(2)$ et $f(3)$.

4. Tracer (C) et (T) dans le même repère.

5. On désigne par t tout réel appartenant à l'intervalle $]0;2]$ et par $A(t)$ la somme des intégrales définies par :

$$A(t) = \int_{-4}^{-2} f(x)dx + \int_{t}^{2} -f(x)dx$$

a. Que représente le réel $A(t)$?

b. Calculer $A(t)$ et la limite de $A(t)$ quand $t \to 0$

B) La fonction g est la restriction de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$

1. Montrer que g est une bijection .

2. Donner l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivé de g^{-1}, la bijection réciproque de g.

3. Tracer dans le même repère de (C). la courbe (Γ) de g^{-1}. En déduire le tableau de variation de g^{-1}. La fonction g^{-1} est-elle dérivable en -1 ?

C) On pose : $\begin{cases} U_0 &= 0 \\ U_n &= \ln(1-U_{n-1}) \quad n \in \mathbb{R} \end{cases}$

1. Calculer U_1 et U_2

2. Exprimer U_{n-1} en fonction de U_n

3. Soit $V_n = (-1+U_{n+1})e^{3n-1} \quad n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont-on précisera le premier terme et la raison .

4. Soit $P_n = V_0.V_1.V_2.\dots.V_n$

a. Calculer P_n en fonction de n.

b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$

Problème 3

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = (x \ln x)^2$$

et on note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{i};\vec{j})$: Unité graphique 2 cm.

Partie A

1. Déterminer l'ensemble de définition E de f.

2. Étudier les limites aux bornes de E. En déduire le prolongement par continuité de f au point 0. Préciser la demi-tangente à la courbe (C_f) en ce point. (Pour le calcul de $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$: on pourra poser $x = \sqrt{t}$)

3. Étudier les variations de f sur E. (On dressera le tableau de variation de f)

Partie B

1. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [1;+\infty[$.

a. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.

b. Dresser le tableau de variation de g^{-1}. Sans explicité g calculer $g^{-1}(\mathrm{e}^2)$.

2. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f) en $+\infty$

3. Construire les courbes (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$; $(C_{g^{-1}})$ est la courbe représentative de la fonction g^{-1}.

4. A l'aide d'une intégration par parties, Déterminer l'aire A de la partie du plan comprise entre la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Problème 4

A) On considère la fonction numérique de la variable réelle x définie telle que.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x\ln x^2 & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Ln désigne le logarithme népérien et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0;\vec{i}; \vec{j})$: Unité graphique 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Étudier la continuité de f en x = 0.

3. Étudier la dérivabilité de f en x = 0.

4. Déterminer les trois points d'intersection de la courbe (C) avec l'axe des abscisses. Vérifier que f est impaire.

5. Étudier les variations de f . Puis Construire (C).

6. Calculer l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe (Ox)des abscisses et les droites d'équations x=0 et $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$.

B) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.

2. Étudier les variations de g.(dresser le tableau de variation de f)

3. Soit h la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty; -1[$.

a. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} dont on dressera le tableau de variations.

b. Sans explicité h^{-1}, calculer $(h^{-1})'(\ln(\frac{1}{2}))$

c. Expliciter h^{-1}

d. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $g(x) > 0$.

Problème 5

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$

1. Déterminer l'ensemble de définition E_f de f.
2. Montrer que f est continue et dérivable sur E_f
3. Étudier les variations de f.
4. Étudier les branches infinies.
5. Tracer la courbe (C) représentative de f dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$. Unité graphique 2 cm
6. Soit g la fonction numérique définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \ln|1 - \ln x|$$

   a. Déterminer l'ensemble de définition E de g.
   b. Étudier les variations de g.
   c. Tracer la courbe (C') représentative de f dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$. Unité graphique 2 cm
7. Soit λ un réel tel que $1 \leq \lambda < \mathrm{e}$. On note $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la région du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations : $x = 1$, $x = \lambda$ et $y = 0$
   a. Calculer $A(\lambda)$
   b. Déterminer λ tel que $A(\lambda) = \ln 16$

Problème 6

I) Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = 1 - x^2 - \ln|x|$$

1. a. Calculer $g(1)$ et $g(-1)$
   b. Montrer que pour tout x de l'ensemble de définition de g : $g(x) - g(-x) = 0$
   c. En déduire une propriété de g.
2. Étudier les variations de g.
3. Déduire de cette étude le signe de g pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de g.

II/ Soit la fonction numérique f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x + \mathrm{e} + \frac{\ln|x|}{x}$$

(e représente la base du logarithme népérien)

1. Préciser l'ensemble de définition de f.
2. Déduire de la partie I) les variations de f.

3. Montrer que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote oblique (Δ) que l'on déterminera par le calcul. Étudier la position de (C) par rapport à (Δ) suivant les valeurs de x. Montrer que (C) admet un centre de symétrie que l'on précisera.
4. Déterminer les points de(C) où la tangente est parallèle à (Δ). On appellera a celui dont l'abscisse est positive. Déterminer une équation de la tangente à (C) au point A.
5. Démontrer que l'équation $-\dfrac{\ln|x|}{x} = -x + \mathrm{e}$ admet deux racines réelles x_1 et x_1 avec $x_1 < x_2$ que l'on comparera aux nombres 0 : 0.5 : 1 : 3 : 4.
6. Construire avec soin la droite (Δ) la courbe (C) et la tangente en A dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. On prendra 2 cm comme unité de longueur sur chaque axe.

III/ 1. On appelle h la restriction de f à $]0;1]$. Montrer que h est une bijection de $]0;1]$ sur un intervalle I que l'on précisera.
2. Construire la courbe (C') de h^{-1} sur le même graphique (C).
3. Sur quelle partie de son ensemble de définition la fonction h^{-1} est-elle dérivable. Calculer $h^{-1}(\frac{1}{\mathrm{e}})$ et $(h^{-1})'(\frac{1}{\mathrm{e}})$
4. Calculer en cm^2, l'aire de la partie du plan définie par par les inégalités.

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

On donne $\ln 2 = 0.7$; $\ln 5 = 1.6$; $\ln 3 = 1.1$

Problème 6

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. unité graphique 2 cm. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x^2}$; on désigne par ln la fonction logarithme népérien, et (C) la courbe de f dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

A) 1. Préciser l'ensemble de définition E_f de f.
2. Étudier les limites aux bornes de E_f.
3. Déterminer la fonction dérivée $f'(x)$.

B) Soit la fonction g telle que : $g(x) = x^2 - 1 + 2\ln x$
1. Calculer $g(1)$
2. **a.** Étudier les variations de g
   b. En déduire le signe de g(x)
   c. Dresser le tableau de variation de f.
3. On pose $h(x) = \ln x$ et on désigne par (Γ) la courbe de fonction h dans le même repère que (C) de f.

a. Étudier la position relative des courbes (C) et (Γ).

b. Montrer que les courbes (C) et (Γ) sont asymptotiques.

4. Tracer les courbes (Γ) et (C) dans le même repère orthonormé.On précisera les tangentes à (Γ) et (C) au point d'abscisse $x = 1$

Problème 7

Pour n entier naturel non nul on définie sur [0;+∞ la fonction numérique f_n par :

$$\begin{cases} f_n(x) = & x^n(2\ln x - 1) \quad si \quad x \in]0;+\infty[\\ f_n(0) = & 0 \end{cases}$$

On désigne par ($\mathscr{C}_n$) la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité 4 cm.

Partie A

On pose n=1

1. **a.** Étudier la continuité et la dérivabilité de f_1 en 0

   b. Étudier le sens variation de f_1. (On dressera le tableau de variations).

   c. Étudier la limite de f_1 en $+\infty$

   d. Préciser la tangente à ($\mathscr{C}_1$) au point 0.

2. Soit un point M_0 d'abscisse x_0 strictement positive de la courbe ($\mathscr{C}_1$).

   a. Montrer que la tangente en M_0 à ($\mathscr{C}_1$) coupe l'axe des ordonnées en un point T_0 dont on donnera les coordonnées.

   b. En déduire une construction simple de la tangente à ($\mathscr{C}_1$) en M_0

3. On désigne par A le point de ($\mathscr{C}_1$) d'ordonnée nulle autre que 0. Tracer la tangente en A à ($\mathscr{C}_1$) et la courbe ($\mathscr{C}_1$).

Partie B

On pose $n \geq 1$

1. Déterminer la fonction dérivée f_n' et f_n sur son ensemble de définition à préciser.

2. On désigne par x_n la valeur autre que 0 pour laquelle f_n' s'annule.Supposons que : $1 \leq x_n \leq \sqrt{e}$ pour $n \geq 2$.

   a. Étudier les variations de f_n.

   b. Tracer le tableau de variations

   c. En déduire que $f_n(x_n) \leq -1$ pour $n \geq$.

3. Pour tout entier naturel non nul n. On définit sur [0;+∞[la fonction G_n définie par : $G_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$. Étudier le signe de $G_n(x)$ et en déduire la position relative des courbes ($\mathscr{C}_{n-1}$) et ($\mathscr{C}_n$)

	FONCTION LOGARITHME **FONCTION EXPONENTIELLE**

Exercice :I

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = -2\sqrt{1-x|x|} \text{ si } x \leq 1 \\ f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \text{ si } x \succ 1 \end{cases}$

a) Vérifier que f est définie sur IR.
b) Montrer que f est continue sur IR et est dérivable sur IR- $\{0;1\}$ et exprimer f'(x).
c) Montrer que est dérivable en 0. Etudier la dérivabilité en 1.
d) Démontrer que la droite Δ d'équation y = 2x est asymptote en -∞ à (C_f), la courbe représentative

Exercice : 2

1.Démontrer que pour tous nombres réels a et b, on a : $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$.

2a) En déduire que pour tous réels u et v strictement positifs, on a :

$$\frac{\ln u + \ln v}{2} \leq \ln \frac{u+v}{2}$$

b) Démontrer que pour tous nombres réels a et b positifs, on a :

$$e^{\frac{u+v}{2}} \leq \frac{e^u + e^v}{2}.$$

3.Généralisation

Soit p et q deux nombres réels strictement supérieurs à 1, et tels que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

a) Démontrer que pour tous nombres réels a et b positifs, on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(On pourra étudier les variations de la fonction f de $[0;+\infty[$ vers IR par :

$$f(x) = ax - \frac{x^q}{q}.)$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

b) En déduire que :

- Pour tous nombre réels u et v, on a : $\frac{\ln u}{p}+\frac{\ln v}{q}\leq \ln\left(\frac{u}{p}+\frac{v}{q}\right)$

- Pour tous nombres réels u et v, on a $e^{\frac{u}{p}+\frac{v}{q}}\leq \frac{e^u}{p}+\frac{e^u}{q}$.

PROBLEME 1

Soit I=$]0;+\infty[$, la fonction f définie sur I par $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x^2-1}{2x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé$(o,\vec{i},\vec{j})$, unité graphique 2 cm.

A Etude des variations de f.

1) a) calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$.Qu'en déduisez-vous pour la courbe (C) ?

b) Calculer $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que, pour tout x de I : $f'(x)=\frac{x^3+3-2\ln x}{2x^3}$.

3) soit u la fonction définie sur I par

$u(x)=x^2+3-2\ln x$.

a) Etudier le sens de variation de u.
b) Déduisez-en, pour tout x de I, le signe de u(x).
4) Dresser le tableau de variation de f.

B Tracée de la courbe (C)

1) Pour tout x de I, on pose $\varphi(x)=f(x)-\frac{1}{2}x$. Calculer $\lim_{x\to +\infty}\varphi(x)$.Qu'en déduisez-vous pour (C) ?2) Soit (D) la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x$.

a) Montrer que (C) et (D) se coupent en un pont I dont vous donnerez les coordonnées.

b) Etudier la position relative de (C) et (D).

3) Tracer (C) et (D) sur le même graphique.

PROBLEME ; 2

A- Soit g la fonction définie par : $g(x)=1-x^2-x^2\ln x$.
1°) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.
2°)a- Calculer $g(1)$. Justifier que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution que l'on déterminera.
b- En déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

B- Soit *f* la fonction définie par : $f(x)=\frac{1}{x}+x\ln x$.

1°)a- Montrer que $f'(x) = -g(x)$.

b- Dresser le tableau de variations de *f*.

c- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions distinctes 1 et α tel que $2,2 \langle \alpha \langle 2,3$.

d- Tracer Cf courbe de *f* dans un repère orthonormé du plan. On placera les points d'intersection de Cf avec la droite *y = x*.

2°) Soit h la restriction de f à $[1;+\infty[$.

a- Justifier l'existence de h^{-1}.

b- h^{-1} est-elle dérivable en 1 ? Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

c- Tracer la courbe Ch^{-1} de h^{-1}

3°) a- Calculer l'aire A (D) du domaine D délimité par la courbe Cf, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

b- En déduire l'aire du domaine délimité par *Ch*, Ch^{-1}, les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

PROBLEME : 3

Partie A

On considère la fonction h définie par : $h(x) = x^2 + 2x + \ln|x+1|$

1°) Etudier les variations de h. Calculer *h (0)* et *h (–2)*

2°) En déduire le signe de *h(x)* pour $x \in]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie par : $f(x) = \dfrac{\ln|x+1|}{x+1} - x$.

1°) Montrer pour tout réel x de *Df*, $f'(x) = -\dfrac{h(x)}{(x+1)^2}$. En déduire le signe de *f'(x)*.

2°) Calculer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition *Df*.
Dresser le tableau de variation de *f*.

3°) Montrer que la droite *D* d'équation *y = –x* est asymptote à la courbe *Cf* de *f*.
Etudier la position relative de *Cf* et *D*.

4°) Montrer que le point *I (–1 ; 1)* est un centre de symétrie de *Cf*.

5°) Tracer la courbe *Cf* dans un repère orthonormé **unité 1 cm**.

6°) Soit α un réel positif, on note A (α) l'aire du domaine délimitée par la courbe, la droite *D* et les droites d'équations *x = 0*, $x = \alpha$.

Calculer en fonction de α A (α)

Calculer la limite de A (α) lorsque α tend vers $+\infty$.

PROBLEME : 4

I. Soit $g(x) = (1-x)e^{-x} - 1$.

1. Etudier les variations de g.

2. calculer g(0), en déduire le signe de g(x) sur $]-\infty, 0]$.

II. Soit

$$\begin{cases} f(x) = -x + xe^{-x} \; si \; x \leq 0 \\ f(x) = \ln|x^2 - 1| \; si \; x \succ 0 \end{cases}$$

1. déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
3. étudier les variations de f.
4. déterminer les points d'intersection de C_f (courbe représentative de f) avec les axes de coordonnées.
5. montrer qu'il existe un unique point A de (C_f) où la tangente est parallèle à la droite d'équation y = -x ; donner une équation de cette tangente T.

III. soit h la restriction de f sur l'intervalle [0, 1[.

1. montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on dressera le tableau de variation
2. h^{-1} est – elle dérivable en 0 ? en $\ln\frac{3}{4}$?si oui donner leur nombre dérivés.
3. expliciter $h^{-1}(x)$.
4. tracer C_f et ($C_{h^{-1}}$)

PROBLEME :5

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = \left[-\frac{1}{2};\ +\propto\right[$ par :

$g(x) = ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. On pose $V(x) = g(x) + \frac{1}{2}x^4$, $\forall x \in$ I.

1) Etudier les variations de g et de V (il ne sera pas nécessaire de calculer les limites aux bornes de g et de V).

2) En déduire que, $\forall x \in$ I, $-\frac{1}{2}x^4 \leq g(x) \leq 0$.

Partie B :

Soit la fonction f définie sur $]-1\ ;\ +\propto[$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x - ln(1+x)}{x^2} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$

On note (C) la courbe de f dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité : 2cm).

1)a) Vérifier, pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 0$, que $f(x) = -\frac{g(x)}{x^2} + \frac{1}{2} - \frac{x}{3}$.

b) En utilisant l'inégalité trouvée en A.2), démontrer que f est dérivable en 0 et donner une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.

c) f est-elle continue en 0 ? Justifier votre réponse.

2) Soit h la fonction définie sur $]-1\ ;\ +\propto[$ par : $h(x) = \frac{-x^2-2x}{1+x} + 2ln(1+x)$

a) Etudier le sens de variations de h ; calculer $h(0)$ et en déduire le signe de h sur$]-1\ ;\ +\propto[$.

b) Démontrer que pour tout x $\in]-1\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;\ +\propto[$, on a $f'(x) = \frac{h(x)}{x^3}$.

c) Dresser le tableau de variation complet de f .

3) Construire (C) et la tangente (T) (On précisera les asymptotes de (C)).

Partie C :

1) a) Démontrer que la fonction w définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par : $w(x) = f(x) - x$ est continue et strictement décroissante.

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]-1\,;\,+\infty[$ et que $\frac{1}{4} < \alpha < 1$.

2) a) Sachant que pour tout $x \geq 0$ $on\ a :$ $x - \frac{x^2}{2} \leq ln(1 + x)$, démontrer alors que pour tout $x \geq 0$ $on\ a :$ $\frac{-1}{1+x} \leq f'(x) \leq 0$; puis pour tout $x \in \left[\frac{1}{4}\,;1\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{4}{5}$;

(On pourra utiliser les résultats de B.2).

b) Démontrer que si $\frac{1}{4} \leq x \leq 1$ $alors$ $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1$.

3) On définit la suite (V_n) par : $V_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation de récurrence $V_{n+1} = f(V_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Justifier que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{4} \leq V_n \leq 1$.

b) Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|V_{n+1} - \alpha| \leq \frac{4}{5}|V_n - \alpha|$; puis que , $\forall n \in \mathbb{N}$, $|V_n - \alpha| \leq \frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

c) En déduire que la suite (V_n) converge et déterminer sa limite .

d) Déterminer un entier n_0 tel que $\forall\ n \geq n_0$, V_n soit une valeur approchée de α à 10^{-1} près

SERIE D'EXERCICES DE MATHEMATIQUES
FONCTION EXPONENTIELLE

Exercice 1 :

1. Soit x un réel, développer l'expression $P(x) = (x+1)(x-2)(2x-1)$.
2. En déduire les solutions de l'équation et de l'inéquation suivantes :

a) $\dfrac{2e^{3x} - 3e^{2x}}{3e^{x} - 2} = 1$, b) $2e^{3x} - 3e^{2x} - 3e^{x} + 2 \geq 0$.

Exercice 2 :

Déterminer le domaine de définition de chacune des fonctions suivantes, calculer ses limites aux bornes de son domaine de définition, étudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée dans l'ensemble où elle est dérivable :

$f(x) = \dfrac{e^{x^2} - 2e^{-x}}{e^{x} + 1}$; $g(x) = (1 + \dfrac{1}{x})^{x}$; $h(x) = (e^{x} - 1)^{\frac{1}{x}}$

PROBLEME 1

A) Soit la fonction h définie par $h(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1) déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
2) Dresser le tableau de variation de h
3) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} prés
4) En déduire le signe de $h(x)$

B)

Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1) justifier que f est définie sur IR
2) Etudier la continuité de f en 0
3) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.
4) Déterminer les limites aux bornes de Df
5) Etudier les branches infinies de Cf
6) Dresser le tableau de variation de f .
7) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$
8) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm

C)

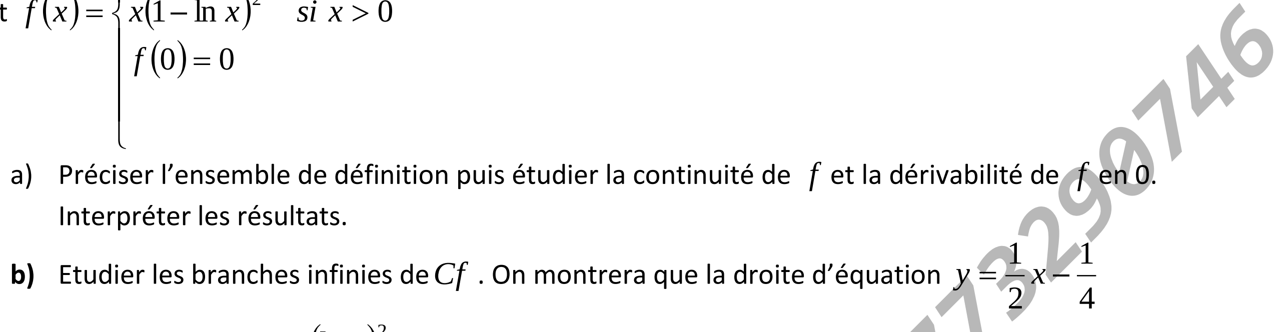
Soit g la restriction de f à $]-\infty,-1]$

1) Prouver l'existence de g^{-1} . Etudier la dérivabilité de g^{-1}
2) Résoudre $g^{-1}(x) = -2$ puis calculer $(g^{-1})'\left(\dfrac{2 - e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)$
3) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.

PROBLEME 2

1) Soit $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}+1$. Dresser le tableau de variation de g puis en déduire le signe de $g(x)$

2) Soit $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & si\ x<0\\ x(1-\ln x)^2 & si\ x>0\\ f(0)=0 & \end{cases}$



   a) Préciser l'ensemble de définition puis étudier la continuité de f et la dérivabilité de f en 0. Interpréter les résultats.

   b) Etudier les branches infinies de Cf . On montrera que la droite d'équation $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$

   c) Résoudre l'équation $(\ln x)^2-1\geq 0$

   d) Dresser le tableau de variation de f puis tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm

3) Soit h la restriction de f à $[e;+\infty[$

   a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera son ensemble de définition. Etudier la dérivabilité de h^{-1} .

   b) Calculer $h(e^2)$. En déduire $(h^{-1})'(e^2)$

   c) Tracer Ch^{-1}

PROBLEME 3

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x-e^{2x-2}$

PARTIE A

1) Déterminer la limite de f $en -\infty$
2) Vérifier que pour tout réel x non nul $f(x)=x\left[1-2e^{-2}\left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$.En déduire la limite en $+\infty$
3) Dresser le tableau de variation de f
4) Montrer que la droite $D: y=x$ est asymptote en $-\infty$.Etudier la position relative de $Cf\ et\ D$
5) Etudier la branche infinie de Cf en $+\infty$
6) On A le point de la courbe d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente T en A
7) On note $I=[0;0{,}5]$ démontrer que $f(x)=0$ admet dans I une solution unique a.Donner une valeur approchée à 10^{-1} prés de a
8) Construire Cf, D et T

PROBLEME 4

1) Soit $h(x)=(1-x)e^x-1$. Dresser le tableau de variation de h et en déduire le signe de $h(x)$

2) $f(x)=\begin{cases}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) & si\ x<0\\ -x+x\ln x\ si\ x>0 & \\ f(0)=0 & \end{cases}$

a) Préciser l'ensemble de définition puis étudier la continuité et la dérivabilité en 0. Interpréter les résultats.

b) Etudier les branches infinies de Cf

c) Montrer que si $x \in]-\infty,0[$ $f'(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$ et préciser alors le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty,0[$

d) Dresser le tableau de variations de f puis tracer Cf

3) Soit k la restriction de f à $[1,+\infty[$

a) Justifier l'existence de k^{-1}.Etudier sa dérivabilité

b) Résoudre $k^{-1}(x) = e$ puis calculer $(k^{-1})'(0)$

c) Tracer la courbe de k^{-1}

PROBLEME 5

Soit la fonction définie sur IR par $g(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} - \ln(1+2e^x)$

1) Calculer $g'(x)$ et montrer que $g'(x)$ est strictement négatif pour tout x réel
2) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$
3) Dresser le tableau de variations de g
4) Donner le signe de $g(x)$

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur IR par $f(\ ) = e^{-2x}\ln(1+2e^x)$

1) Montrer que $f'(x) = 2e^{-2x}g(x)$
2) Déterminer
   a) La limite de f $en -\infty$
   b) La limite de f $en +\infty$. On pourra remarquer que si on pose

$$X = 1+2e^x,\ f(x)\ s'écrit\ 4\frac{X}{(X-1)^2}\frac{\ln X}{X}$$

3) Dresser le tableau de variations de f
4) Tracer Cf dans un repère orthonormé
5) Soit α un réel strictement positif.

Vérifier que pour tout réel x, $\frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2\left(\frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}\right)$ en déduire la valeur de la fonction h définie par

$h(x) = \frac{e^{-x}}{1+2e^x}$

SERIE D'EXERCICES DE MATHEMATIQUES
FONCTIONS LOGARITHME ET EXPONENTIELLE

EXERCICE 1

1) Résoudre les équations suivantes

$a)\ln(2x-3)=-1;\ b)\ln(x^2-3x-2)=0;\ c)\ln x+\ln(2x+5)=\ln 3;\ d)\ 2(\ln x)^2+5\ln x-3=0;$

$e)(\ln(x-1))^2-\ln(x-1)-6=0$

$f)\ln(2x-e)>1;\ g)\ln(2x+1)\leq\ln(x+3);\ h)\ln(2-x)+\ln(x+4)\geq\ln(3x+2);\ i)-2(\ln x)^2-5\ln x+3>0$

2) Résoudre dans IR^2

$a)\begin{cases}\ln x+3\ln y=1\\ 9\ln x-6\ln y=20\end{cases}$ $b)\begin{cases}3\ln x-4\ln y=-6\\ \ln(x^2)+\ln y=7\end{cases}$ $c)\begin{cases}x+y=25\\ \ln x+\ln y=2\ln 12\end{cases}$

3) Soit $p(x)=2x^3-3x^2-3x+2$

a) Calculer $p(1)$ en déduire une factorisation complète de $p(x)$

b) Résoudre $2(\ln x)^3-3(\ln x)^2-3\ln x+2=0$ puis $2e^{3x}-3e^{2x}-3e^x+2=0$

c) Résoudre $p(x)>0$

d) Résoudre $2(\ln x)^3-3(\ln x)^2-3\ln x+2>0$ puis $2e^{3x}-3e^{2x}-3e^x+2\geq 0$

EXERCICE 2

Etudier f et tracer sa courbe dans chacun des cas suivants :

$f(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{x-1}\right),\quad f(x)=\ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right|,\quad f(x)=x+\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

EXERCICE 3

1) soit $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$. Etudier les variations de f puis montrer que l'équation f(x)=0 admet une solution unique a. Justifier que $1{,}7\leq a\leq 1{,}8$.

2) $g(x)=-\frac{7}{8}x^2+x-\frac{1}{4}x^2\ln x\quad si\ x>0\qquad g(0)=0$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0.

b) Etudier les branches infinies en l'infini.

c) Montrer que $g'(x)=xf\left(\frac{1}{x}\right)$ puis en déduire les variations de g.Tracer C_g.

EXERCICE 4

1) Soit $f(x)=x-1-\ln x$. Etudier les variations de f. Calculer $f(1)$ puis en déduire le signe de la fonction.

2) $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\ si\ x<0\\ x(x-2\ln x)\ si\ x>0\\ g(0)=0\end{cases}$

a) Etudier la continuité et la dérivabilité de g en 0

b) Etudier les branches infinies.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction. Tracer la courbe de g

PROBLEME 1

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x-e^{2x-2}$

PARTIE A

1) Déterminer la limite de $f\ en\ -\infty$

2) Vérifier que pour tout réel x non nul $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2}\left(\dfrac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$.En déduire la limite en $+\infty$

3) Dresser le tableau de variation de f

4) Montrer que la droite $D : y = x$ est asymptote en $-\infty$.Etudier la position relative de Cf et D

5) Etudier la branche infinie de Cf en $+\infty$

6) On A le point de la courbe d'abscisse 1. Déterminer une équation de la tangente T en A

7) On note $I = [0; 0,5]$ démontrer que $f(x) = 0$ admet dans I une solution unique a.Donner une valeur approchée à 10^{-1} prés de a

8) Construire Cf, D et T

PARTIE B

On définit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = e^{2u_n - 2} \end{cases}$

1) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = e^{2x-2}$.démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$.En déduire $g(a)$

2) Démontrer que $\forall x \in I \quad |g'(x)| \leq \dfrac{2}{e}$

3) Démontrer que $\forall x \in I,\ g(x) \in I$

4) En utilisant l'inégalité des accroissements finis démontrer que $\forall n \in IN,\ |u_{n+1} - a| \leq \dfrac{2}{e}|u_n - a|$ en déduire que $|u_n - a| \leq \left(\dfrac{2}{e}\right)^n$ et que (u_n) converge vers un réel à déterminer.

5) Déterminer le plus petit entier naturel n *tel que* $|u_n - a| < 10^{-5}$

PROBLEME 2

A) Soit la fonction h définie par $h(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$

1) Dresser le tableau de variation de h

2) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0,1[$. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} prés. En déduire le signe de $h(x)$

B) Soit la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} & si\ x < 0 \\ x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

1) justifier que f est définie sur IR

2) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.Interpréter les résultats

3) Etudier les branches infinies de Cf

4) Dresser le tableau de variation de f.

5) Montrer que $f(\alpha) = \alpha(1 + 2e^{-\alpha})$

6) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm

C) Soit g la restriction de f à $]-\infty, -1]$

1) Prouver l'existence de g^{-1}. Etudier la dérivabilité de g^{-1}

2) Résoudre $g^{-1}(x) = -2$ puis calculer $(g^{-1})'\left(\dfrac{2 - e^{-\frac{1}{2}}}{2}\right)$

3) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère.

PROBLEME 3

Soit g définie par $g(x)=(1-x)e^{-x}-1$

1) Dresser le tableau de variations de g
2) Calculer $g(0)$ puis en déduire le signe de $g(x)$

PARTIE B

Soit f définie par $f(x)=\begin{cases}1-x+xe^{-x} \ si \ x\le 0\\ x(\ln x)^2+x+1 \ si \ x>0\\ f(0)=1\end{cases}$

1) Justifier que f est définie sur IR
2) Etudier la continuité de f en 0
3) Etudier la dérivabilité de f en 0 .Interpréter les résultats.
4) Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition
5) Etudier les branches infinies de Cf
6) Dresser le tableau de variations de f
7) Tracer Cf dans un repère orthonormé unité 2cm (on précisera la tangente au point d'abscisse e^{-1} et on placer le point d'abscisse 1)

PARTIE B

Soit h la restriction de f à $]0;+\infty[$

1) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle à préciser.
2) Etudier la dérivabilité de h^{-1}
3) Calculer $(h^{-1})'(2)$
4) Tracer la courbe de h^{-1}

PROBLEME 4

On considère la fonction définie g définie par $g(x)=\ln x+1-e^{-x}$

1) Etudier les variations de g
2) Montrer que l'équation g $(x)=0$ admet une solution unique a *tel que* $0,6\le a\le 0,7$
3) En déduire le signe de $g(x)$

PARTIE B

On considère la fonction définie par

$f(x)=\begin{cases}x\ln x+e^{-x} \ si \ x>0\\ \dfrac{e^{\frac{1}{2}x}}{|x^2-1|} \ si \ x\le 0\end{cases}$

1) Justifier que f est définie sur $IR-\{-1\}$
2) Ecrire $f(x)$ sans valeur absolue
3) Etudier la continuité et la dérivabilité en 0(on pourra montrer que si $x\in]-1,0]$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{-\frac{1}{2}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{2}x}-1}{\frac{1}{2}x}\right)-x}{x^2-1}$)
4) Déterminer les limites aux bornes puis étudier les branches infinies.
5) Dresser le tableau de variation de f. Montrer que $f(a)=(a+1)\ln a+1$
6) Soit h la restriction de f *à* $[a,+\infty[$
   a) Montrer que h admet une bijection réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à préciser .h^{-1} est-elle dérivable sur J ? justifier.
   b) Calculer h(1) puis $(h^{-1})'\left(\dfrac{1}{e}\right)$
7) Tracer Cf *et* Ch^{-1} dans le même repère orthonormé unité 2cm

0.5.2 Exponentielles et Puissances

Exercice 4

A) Soit g la fonction définie par $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^x + 1$.

1) Étudier les variations de g puis dresser le tableau de variations.

2) En déduire le signe de g.

B) Soit f est la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} \quad si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par ($\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 .

2) a) Calculer $f'(x)$ puis établir une relation entre $f'(x)$ et $g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation f

3) Montrer que la droite ($\mathscr{D}$) d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une asymptote à ($\mathscr{C}_f$)

4) Tracer ($\mathscr{C}_f$ et ($\mathscr{D}$) dans le même repère (unité = 5 cm).

Exercice 5

On considère la suite (U_n) définie par :$U_0 = 2$ et $U_{n+1} = U_n e^{1-U_n}$ pour tout entier naturel n.

1-) Soit la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x}$.

2-) a-) Dresser le tableau de variation de f puis en déduire que :$\forall \in \mathbb{N}^*$, .$0 < U_n \leq 1$

b-) Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

3-) Monter que la suite (U_n) est convergente .Déterminer sa limite.

4-) Soit (S_n) la suite définie pour tout $\mathbb{N}$ par : $S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$

a-) Montrer que pour tout , .$U_{n+1} = 2e^{(n+1)-S_n}$

b-) En déduire la limite de la suite (S_n).

Exercice 6

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. On étudie la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = xe^x - nx$. On note $\mathscr{C}_n$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

A-) Soit la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $g_n(x) = (1 + x)e^x - n$.

1-) Déterminer la dérivée de g_n. Faire le tableau des variations de g_n et déterminer les limites de g_n aux bornes de son ensemble de définition.

2-) Montrer que g_n s'annule pour une unique valeur α_n, et α_n est positif ou nul.

3-) Montrer que : $\alpha_n = \ln \dfrac{n}{1 + \alpha_n}$, avec $0 < \alpha_n < \ln n$.

4-) a-) Montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln x = x - 1$ (1).

b-) Déduire de (1) le signe de $g_n(\ln\sqrt{n})$.

c-) Justifier que : $\frac{1}{2}\ln n = \alpha_n$. Quelles sont les limites des suites de terme général α_n et $\frac{\alpha_n}{n}$?

B-) 1-) Déterminer la dérivée de f_n, faire le tableau des variations de f_n et déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition. Montrer que :
$f_n(\alpha_n) = \frac{-n\alpha_n^2}{1+\alpha_n}$.

2-) Montrer que $(\mathscr{C}_n)$ admet une asymptote $(\mathscr{D}_n)$ que l'on déterminera.

3-) Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C}_n)$ et de l'axe des abscisses, et préciser la position de $(\mathscr{C}_n)$ par rapport à cet axe.

4-) Étudier les positions relatives de $(\mathscr{C}_n)$ et de $(\mathscr{C}_{n+1})$.

5-) a-) Montrer que $0,35 < \alpha_2 < 0,40$. Déterminer les valeurs décimales approchées à près, par défaut et par excès, de α_2 En déduire un encadrement de $f_2(\alpha_2)$.

b-) Tracer $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ sur le même graphique en mettant en évidence les résultats précédents (on choisira comme unité 10 cm sur les deux axes).

EXERCICE : 08

Soit $a \in \mathbb{R}^+\setminus\{0;1\}$ et f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_a(x) = a^{\sqrt{x}} = e^{\ln a\sqrt{x}}$; $(\mathscr{C}_a)$ sa courbe représentative dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

1) a) Justifier la dérivabilité de f_a sur $]0;+\infty[$ et calculer $f_a'(x)$ pour $x > 0$.

b) La fonction f_a est-elle dérivable au point 0 ?

c) Étudier la limite de f_a en $+\infty$. Dresser le tableau de variation de f_a selon les valeurs de a.

2) a) Donner une équation de la tangente $(\mathscr{T}_a)$ à la courbe $(\mathscr{C}_a)$ au point A d'abscisse 1.

b) Calculer $f_a''(x)$ pour $x > 0$. Étudier selon les valeurs le signe de $f_a''(x)$ pour $x > 0$. En déduire l'existence d'un point d'inflexion de la courbe $(\mathscr{C}_a)$ si $a > 1$.

3) Construire dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite $(\mathscr{T}_e)$ tangente à $(\mathscr{C}_e)$ au point d'abscisse 1.

EXERCICE : 09

Soit la fonction $f : x \mapsto e^{x-1}x^2$.

1-) Préciser l'ensemble de définition de f . Montrer que f admet une limite finie en 0. On notera g le prolongement par continuité de f .

2-) Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

3-) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer sa fonction dérivée. En déduire le sens de variation de f.

4-) a-) Calculer $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ (En posant ,) $u(x)=\frac{x-1}{x^2}$, $\frac{f(x)}{x}=\frac{u(x)}{x}\cdot\frac{e^{\frac{x-1}{x^2}}}{u(x)}$.

b-) Montrer que g est dérivable en 0 et donner une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0.

5-) Tracer soigneusement la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (prendre 3 cm pour unité).

EXERCICE : 10

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$ puis la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=x+2-e^x$.

1-) Étudier les variations de g sur $[0,+\infty[$.

2-) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution α tel que $1,14<\alpha<1,15$.

3-) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

4-) Montrer que $f'(x)=\frac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$. En déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$.

5-) Montrer que $\forall x>0$: $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$.

6-) Écrire une équation de l'asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

7-) Établir que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$ où α est la solution de l'équation $g(x)=0$.

8-) Établir que pour tout $x>0$, $f(x)-x=\frac{(x+1)(e^x-xe^x-1)}{xe^x+1}$

9-) Écrire l'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse $x_0=0$.

10-) Construire la courbe $(\mathscr{C}_f)$.

EXERCICE : 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

1-) Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative $(\mathscr{C})$ dans un plan $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. Démontrer que $(\mathscr{C})$ a un centre de symétrie. Construire la tangente à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse nulle.

2-) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1;1[$. On appelle g la bijection réciproque de f. g est-elle dérivable sur $]-1;1[$?

3-) Démontrer que pour tout x réel on a : $f'(x)=1-[f(x)]^2$. En déduire qu'en tout point où g est dérivable, on a $g'(x)=\frac{1}{1-x^2}$.

4-) Soit m un réel de l'intervalle $]-1;1[$. Résoudre l'équation $f(x)=m$. En déduire $g(x)$ pour tout $x\in]-1;1[$.

5-) Soit $(a;b)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que $f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$. En déduire que si $(\alpha;\beta)\in I^2$ où $I=]-1;1[$ alors $\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}$.

Problème 1

On se propose d'étudier la fonction numérique f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (2x-4)e^{\frac{x}{2}} + 2 - x$$

On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan . On choisit 2 cm pour unité graphique .

A) Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction numérique définie pour tout réel x par :

$$g(x) = x - e^{-\frac{x}{2}}$$

1. Étudier le sens de variation de g .

2. préciser les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$. (On ne demande pas de construire la représentation graphique de g).

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule et que $0.70 \leq \alpha \leq 0.71$

4. Étudier le signe de $g(x)$

B)

1. **a.** Exprimer f'(x) à l'aide de g(x) et en déduire les variation de f .

b. α étant le nombre réel défini en A-3. Démontrer que :$f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}$.

c. En déduire un encadrement de f(α) d'amplitude 0,1.

2. **a.** Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ainsi celle de $\frac{f(x)}{x}$

b. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $-\infty$

c. Démontrer que Γ admet en $-\infty$ une asymptote D que l'on précisera.

3. **a.** Dresser le tableau de variation de f et tracer sur le même graphique D et Γ

b. Placer en particulier les points d'intersections de Γ avec l'axe des abscisses ainsi que le point N d'abscisse 0 appartenant à Γ

c. Tracer la tangente à Γ au point N.

4. **a.** A l'aide d'une intégration par parties, Calculer pour tout nombre réel x , l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x (2t-4)e^{\frac{t}{2}} dt$$

b. Calculer , en cm^2 l'aire A du domaine constitué des points de coordonnées (x ; y) satisfaisant à : $0 \leq x \leq 2$ et $f(x) \leq y \leq 2 - x$.

Problème 2

A) **1.** Intégrer l'équation différentielle : $y'' - y' = 0$

2. Déterminer la solution particulière de cette équation telle que $y_0 = 0$ et $y'_0 = 1$

B) Soit f et g deux fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad et \quad g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

1. Vérifier que :

a. $[g(x)]^2 - [f(x)]^2$

b. $f'(x) = g(x)$

2. **a.** Étudier les variations de f.

b. Étudier les branches infinies de (C) la courbe représentative de f dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité 2 cm.

c. Construire (C) ; on tracera la tangente à (C) en l'origine.

3. **a.** Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble que l'on précisera.

b. Dresser le tableau de variation de f^{-1}, fonction réciproque de f.

c. En utilisant la question 1. Montrer que :

$$(f^{-1})(y_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + y_0^2}} \quad où \quad y_0 = f(x_0)$$

d. Construire la courbe (C') représentative de f^{-1} dans le même repère que (C).

e. Déterminer l'aire du domaine plan compris entre la courbe (C). La droite d'équation $y = x$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$

Problème 3

Partie A)

On considère f la fonction numérique d'une variable d'une variable réelle x définie par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{|1-x|}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$. Unité 2 cm.

1. Déterminer l'ensemble de définition E_f de f.

2. Étudier la dérivabilité de f sur son ensemble de définition E_f.

3. Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) en $x = 0$

4. Étudier les variations de f.

5. Étudier les branches infinies de (T) à (C).

6. Tracer avec soin la courbe (C) et la tangente (T).

Partie B)

Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par : $h(x) = \ln(xe^{1-x})$

1. Étudier les variations de h

2. Tracer (C') la courbe représentative de h dans le même repère que la courbe (C) de f.

Problème 4

Partie A)

On considère les fonctions numériques de la variable réelle x définies par :

$$f_k(x) = (x+1)e^{kx}$$

où $\in \mathbb{R}$. On note (C_k) les courbes représentative des fonctions f_k dans le repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$

1. Comment peut-on choisir k pour que f_k présente un maximum, un minimum.

2. Montrer que toutes les courbes d'équation $y = (x+1)e^{kx}$ passe par deux points fixes , l'un sur l'axe des abscisses et l'autre sur l'axe dés ordonnées .

Partie B)

On pause : $k = 1$ et $k = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

1. Montrer que f_1 et f_{-1} sont dérivable sur **R** .

2. Dresser le tableau de variations de f_1 et f_{-1}.

3. Tracer les courbes C_1 et C_{-1} respectives de f_1 et f_{-1} dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4. Quelles sont les équations des tangentes à C_1 et C_{-1} aux points communs d'abscisses -1 et 0.

Partie C)

On considère la fonction h définie par : $h(x) = |f_1(x)|$

1. Sans faire une étude complète de h, Comment peut-on construire sa courbe (C') dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ par rapport à (C_1)

2. Construire (C') dans le même repère.

3. déduire le tableau de variation de h.

Problème 5

Le plan (P) est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Unité 2 cm.

A) On considère h_a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h_a(x) = (-x^2 + ax + a)e^{-x} + 1 \quad où a \in \mathbb{R}$$

1. Montrer que toutes les courbes C_a représentatives de fonctions h_a passent par un même point J dont on déterminera les coordonnées .
2. Soit M_a le point de C_a d'abscisse $a+2$, Calculer l'ordonnée de M_a.
3. Lorsque a varie le point M_a décrit une courbe (Γ). Donner une équation cartésienne de (Γ).
4. Puis vérifier que le point J appartient à cette courbe.

B) Dans la suite on suppose que $a = 0$. On pose $f(x) = h_0(x) = (-x^2)e^{-x} + 1$

1. Étudier les variations de f.
2. Montrer qu'il existe $\alpha \in]-1;0[$ tel que $\alpha^2 e^{-\alpha} = 1$
3. tracer la courbe C_0 représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Unité 2 cm.
4. Calculer l'aire $A(\lambda)$ de la partie comprise entre la courbe C_0 et les droites $x = 1$, $x = 2$ et $x = \lambda$ avec $\lambda > 2$. Calculer $\lim_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$
5. Calculer f" la dérivée seconde de la fonction f. Vérifier quelque soit x réel on a :

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = -2e^{-x} + 1$$

6. Donner une solution de l'équation différentielle :

$$g''(x) + 2g'(x) + g(x) = 0$$

qui prend la valeur 0 au point 0.

<u>Problème 6</u>

A) Soit les équations différentielles **:**

$$\begin{aligned} (1) \quad y'' + 4y' + 4y &= 4x + 8 \\ (2) \quad y'' + 4y' + 4y &= 0 \end{aligned}$$

1. Déterminer les nombres réels a et b , tels que la fonction P définie par $P(x) = ax+b$ soit l'équation (1).
2. On désigne par g une solution de (2).
   - **a.** Montrer que g+p est une solution de l'équation (1)
   - **b.** Résoudre l'équation (2)
   - **c.** En déduire toutes les solutions de (1).
   - **d.** Déterminer la solution de f de (1) qui s'annule en -1 et qui prend la valeur 2 en 0.

B) Soit la fonction h définie par : $h(x) = \mathrm{e}^{2x} - 2x - 1$

1. Étudier les variations de h.
2. En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.

C) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-2x} + x + 1$$

1. Étudier les variations de f. On montrera que $f'(x)$ se met sous la forme $\mathrm{e}^{-2x}h(x)$
2. Soit (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé ($O; \vec{i}; \vec{j}$) . Unité graphique 2 cm
   a. Montrer que (C) admet une asymptote oblique (D) que l'on précisera.
   b. Étudier suivant les valeurs de x, la position relative de (C) et (D) et préciser leur intersection.
   c. Tracer (C) et (D).
3. **a.** Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.
   b. Sur quelle partie de son ensemble de définition la fonction réciproque f^{-1} de f est-elle dérivable.
   c. Calculer $(f^{-1})'(0)$ puis tracer dans le même repère que (C) la courbe (C') de f^{-1}.
4. Soit m un réel supérieur -1.
   a. Déterminer le couple de réels a et b tel que la fonction $T(x) = \mathrm{e}^{-2x}(ax+b)$ soit une primitive de la fonction définie par $t(x) = \mathrm{e}^{-2x}(x-1)$.
   b. Déterminer ensuite l'aire A(m) de la partie limitée par les droites d'équations $x+1=0$, $x=m$, courbes (C) et la droite D.
   c. Calculer $\lim_{m\to+\infty} A(m)$

Problème 7

On considère la famille de fonction f_a de la variable réelle x définie par :

$$f_a(x) = 1 + \mathrm{e}^{x} + ax$$

où a désigne un paramètre réel non nul.
On désigne par (C_m) la courbe représentative de la fonction f_a dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ 2 cm

A **1.** Établir suivant les valeurs du paramètre a , les variations de f_a.

2. Montrer que toutes les courbes (C_a) passe par un point fixe A dont on précisera les coordonnées.

3. Montrer que la droite (D) : y = a x + 1 est asymptote à la courbe (C_a) .

4. Si a est un réel strictement négatif, la fonction f_a, admet un extremum correspondant à un sommet I_a de la courbe (C_a). Quel est l'ensemble de points I_a lorsque a varie ?

B) 1. construire les courbes (C_e) et $C_{-e})$ correspondant aux valeurs de e et −e du paramètre a.

2. Préciser les positions des deux courbes.

3. Tracer leur tangente au point d'abscisse 0.

4. On considère la fonction définie par : $h(x) = -f_{-e}$.Déduire de la courbe de (C_{-e}) la courbe représentative de h.

Problème 8

On considère la famille de fonction f_a de la variable réelle x définie par :

$$f_m(x) = \frac{1}{2} + e^{-x} + mx$$

où a désigne un paramètre réel non nul.
On désigne par (C_m) la courbe représentative de la fonction f_m dans un repère orthonormé $(O,\vec{i}, \vec{j})$ 2 cm

Partie A 1. Étudier suivant les valeurs de m les variations de f_m. On distinguera deux cas : m< 0 et m> 0

2. Montrer que toutes les courbes (Cf_m) passe par un point fixe A dont on déterminera les coordonnées.

3. Montrer que la droite (D) :y = m x + $\frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe au voisinage de $+\infty$. Étudier la position de (D) par rapport à la courbe.

4. Pour m> 0, on considère le point B_m l'extremum. déterminer l'ensemble (Γ)des extremums.

Partie B) 1. Déduire de la partie A,les variations de f_e et f_{-e}.

2. Étudier les branches infinies de f_e et f_{-e}.

3. étudier la position de C_f par rapport à (D) ; puis construire les deux courbes dans le même repère.

4. Soit (Δ)le domaine de la partie limitée par les droites x=1 ; x=2 et les deux courbes, calculer l'air de ce domaine

Problème 9

On donne les fonctions numériques de la variable réelle x définie par :

$$f_m(x) = \frac{(x^2 - m)e^x}{x+1}$$

où m est un paramètre réel. (C_m) la courbe de f_m dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$. Unité 2 cm.

1. Étudier suivant les valeurs de m les variations des fonctions f_m.(quand $f'_m(x)$ admet en plus de la racine 0 , les racines x_1 et x_2 , on pourra étudier le signe de leur produit afin de les placer par rapport à 0 et -1).
2. O pose m=1. Construire la courbe (C_1) de f_1.
3. Soit g la restriction de f_1 sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que $g(x)$ admet une bijection réciproque $g^{-1}(x)$. Construire dans le même repère que (C_1), la courbe (C'_1) de g^{-1}.
4. Montrer que les courbes (C_1) et (C'_1) se coupent en un point de la droite $y - x = 0$ dont l'abscisse est solution de l'équation $xe^x - e^x - x = 0$

calcul intégral

1. Calculer les intégrales suivantes (on précisera éventuellement l'intervalle de validité) :

1°) $\int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$ **2°)** $\int_0^{-2} t.\exp(-t^2)\mathrm{d}t$ **3°)** $\int_1^e (x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})dx$ **4°)** $\int_{-1}^{x} \frac{dt}{1-t}$

5°) $\int_0^{\pi/6} \sin 3u\, du$ **6°)** $\int_{e^2}^{e} \frac{\ln t}{t} dt$ **7°)** $\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x^n} dx$ $(n \in N^*)$ **8°)** $\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$

9°) $\int_a^{a^n} \frac{dx}{x \ln x}$ **10°)** $\int_1^{e^2} (x^3+1)\ln(x)\mathrm{d}x$ **11°)** $\int_0^1 (x^2+x+1)e^{-x}\mathrm{d}x$; **12°)** $\int_0^{\pi} x^2 \sin(x)\mathrm{d}x$.

Rep : **1)** $\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{16}\right)$ **2)** $\frac{1-e^{-4}}{2}$ **3)** $e^2/2 - 1/e - 1/2$ **4)** $\ln(2) - \ln(1 - x)$ pour $x < 1$
5) 1/3 **6)** −3/2 **7)** (ln2)/n **8)** 1 − 2/e **9)** ln(n) avec $a > 0$ et $a \neq 1$
10) $(7e^8 + 16e^2 + 17)/16$ **11)** 4 − 8/e **12)** $\pi^2 - 4$

2. Déterminer les primitives des fonctions suivantes. On précisera dans chaque cas l'intervalle.

1°) f(x) = ln(x) ; **2°)** $f(x) = x.e^{-x}$; **3°)** $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}}$;

4°) f(x) = tan(x) ; **5°)** f(x) = cotan(x) ; **6°)** $f(x) = \frac{1}{x.\ln(x)}$.

3. **1°)** Montrer que les intégrales $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\pi} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t}\mathrm{d}t$ existent.

2°) Calculer I + J et I – J. En déduire I et J.

4. Application du changement de variable. Montrer:

-- si f est impaire et continue sur [–a, a], alors $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$ $(a > 0)$;

-- si f est paire et continue sur [–a, a], alors $\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$ $(a > 0)$;

-- si f est périodique de période T est continue sur **R**, alors $\int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t$.

Calculer : $\int_{-3}^{3} x\sqrt{x^4+1}\,\mathrm{d}t$; $\int_0^{2\pi} \sin^3 t\,\mathrm{d}t$.

5. Etudier rapidement f : x ξ $x + 1 + e^{-x}$; préciser les branches infinies ; tracer C_f. Pour a> 0, calculer l'aire du domaine plan $D_a = \{M(x, y) ; 0 \leq x \leq a \text{ et } x + 1 \leq y \leq f(x)\}$. Déterminer la limite de cette aire quand a tend vers $+\infty$.

6. Soit f définie sur **R*** par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)}$.

1°) Montrer que f est définie, continue et dérivable sur **R***. **2°)** Montrer que f est impaire.

3°) Calculer f '(x) pour x > 0. On écrira : f(x) = F(2x) − F(x) avec F primitive de x ξ $\frac{1}{\ln(1+x^2)}$ sur $\mathbf{R}^*_+$

6. (escp 89) Soit f définie sur **R** par : $f(x) = \int_x^{2x} \exp(-t^2)dt$

1°) a) Etudier la parité de f.

b) Déterminer le signe de f(x) suivant les valeurs de x.

c) Montrer que f admet 0 pour limite en $+\infty$ et $-\infty$.

2°) a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = 2.\exp(-4x^2) - \exp(-x^2)$.

b) Etudier la variation de f. Préciser les points où f admet un extremum.

c) Calculer f ''(x) et déterminer son signe.

d) Construire C_f (on admettra que le maximum de f est sensiblement égal à 0,3).

Suites définies par une intégrale.

7. Soit $I_n = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)^n \, dx$.

1°) Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $(2n + 1) I_n = -2n I_{n-1}$.

2°) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

8. p et q étant deux nombres entiers positifs ou nuls, on pose : $B(p, q) = \int_0^1 t^p (1-t)^q \, dt$.

1°) Comparer B(p, q) et B(q, p).

2°) Etablir la relation : $B(p, q) = \dfrac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$ $(p \geq 1)$.

3°) Calculer B(0, n) pour tout n appartenant à **N** ; en déduire B(p, q).

9. Pour n entier naturel, on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} \, dx$

1°) Quelle est la signification géométrique de I_0 ? En déduire la valeur de I_0.

2°) Calculer I_1.

3°) Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $I_n = \dfrac{n-1}{n+2} I_{n-2}$. En déduire la valeur de I_n en fonction de n (on distinguera suivant la parité de n).

4°) Montrer que (I_n) est une suite positive et décroissante et que cette suite converge vers 0.

5°) Montrer que $n(n + 1)(n + 2) I_n I_{n-1}$ est indépendant de n et calculer sa valeur ; en déduire un équivalent simple de I_n lorsque I_n tend vers $+\infty$.

10. Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n \, dx$, avec n appartenant à **N**.

1°) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \geq 2$, on a : $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$.

3°) Après avoir calculé I_0 et I_1, en déduire I_{2p} et I_{2p+1}, $p \in$ **N**.

4°) Montrer que pour tout $p \in$ **N**, on a : $\dfrac{I_{2p+2}}{I_{2p}} \leq \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}} \leq 1$.

5°) En déduire la limite quand p tend vers $+\infty$ de $\left(\dfrac{2.4.6.\ldots.2p}{1.3.5\ldots(2p-1)}\right)^2 . \dfrac{1}{2p+1}$ (formule de Wallis).

11. On note, pour tout nombre réel a positif et pour tout entier naturel n :

$$u_n(a) = \int_0^1 \exp(\ a(1-x)\ )\ x^n\ dx$$

1°) Calculer $u_0(a)$.

2°) Convergence de la suite $(\ u_n(a)\ )_{n\in\mathbf{N}}$. Soit a > 0 donné.

a) Montrer que pour tout n dans **N** : $0 < u_n(a) < \dfrac{\exp(a)}{n+1}$.

b) Montrer que la suite $(\ u_n(a)\ )$ est décroissante.

c) Déterminer la limite de $u_n(a)$ quand n tend vers $+\infty$.

3°) Forme explicite de $u_n(a)$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n dans **N** :

$$a.u_{n+1}(a) = -1 + (n+1).u_n(a).$$

b) Montrer par récurrence sur n que pour tout n dans **N** :

$$u_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}}\left[\exp(a) - \sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\right].$$

12. (essec math 3 2001) On étudie dans cet exercice la suite (S_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2} \quad \text{c'est à dire} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

A cet effet, on introduit pour tout réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$:

$$I_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k}(t)\ dt \quad ; \quad J_k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2k}(t)\ dt$$

1°) convergence de la suite (J_k/I_k).

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre réel t tel que $0 \leq t \leq \pi/2$: $t \leq \dfrac{\pi}{2}\sin(t)$.

b) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier k tel que $k \geq 0$: $0 \leq J_k \leq \dfrac{\pi^2}{4}(I_k - I_{k+1})$.

c) Exprimer I_{k+1} en fonction de I_k en intégrant par parties I_{k+1} (on pourra poser $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = \cos^{2k+1}(t)$ dans l'intégration par parties).

d) Déduire des résultats précédents que J_k/I_k tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$.

2°) Convergence et limite de la suite (S_n).

a) Exprimer I_k en fonction de J_k et J_{k-1}, en intégrant deux fois par parties l'intégrale I_k ($k \geq 1$).

b) En déduire la relation suivante pour $k \geq 1$:

$$\frac{J_{k-1}}{I_{k-1}} - \frac{J_k}{I_k} = \frac{1}{2k^2}$$

c) Calculer J_0 et I_0, puis déterminer la limite S de la suite (S_n).

d) Etablir l'inégalité suivante pour tout nombre entier $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

En déduire un encadrement de $S_{n+p} - S_n$ pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, puis de $S - S_n$, et montrer que $0 \leq S_n - S + \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n^2}$. *Autrement dit,* $S_n + \dfrac{1}{n}$ *constitue une valeur approchée de S à* $\dfrac{1}{n^2}$ *près.*

e) Ecrire un programme en PASCAL calculant et affichant une valeur approchée du nombre S à 10^{-6} près.

Extension de la notion d'intégrale.

13. **1°)** Justifier l'existence de I = $\int_0^1 x^2 \ln(x)\,dx$ et calculer sa valeur. Mêmes questions pour J = $\int_0^1 \ln(x)\,dx$, K = $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$.

2°) Intégrale de Dirichlet : Montrer que l'intégrale D = $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ est convergente.

Indication : en 0 pas de problème, en $+\infty$ faire une intégration par parties sur l'intervalle [a, X],puis $X \to +\infty$. On ne demande pas de calculer sa valeur, qui est $\pi/2$. Sachant cela, montrer que l'intégrale F = $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ est convergente et calculer sa valeur.

14. Rappel: une fonction f majorée sur [a, b[et croissante sur [a, b[admet une limite finie en b (b étant un nombre réel > a ou $+\infty$). Faites un dessin pour vous en convaincre.

1°) Démontrer : $\forall t \in [1, +\infty[\quad 1/(1+t^2) \leq 1/t^2$. En déduire que la fonction : $\varphi : [1, +\infty[\to \mathbf{R}$, définie par : $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ admet une limite finie en $+\infty$, puis que l'intégrale I = $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ est convergente.

Quelle est la nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t^2}\,dt$?

2°) Montrer que la fonction tan définit une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur **R**. La réciproque de cette fonction est la fonction Arc tangente, notée Arctan. Etudier cette fonction : ensembles de départ et d'arrivée, continuité, sens de variations, limites. Tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé. Déterminer Arctan(0), Arctan(1).
Montrer que la fonction Arctan est dérivable et calculer sa dérivée.
En déduire la valeur de I.

3°) Soit n un entier naturel. Etablir successivement:

$$\forall y \neq 1 \quad \frac{1}{1-y} = \sum_{k=0}^{n} y^k + \frac{y^{n+1}}{1-y} \;;$$

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2} \;;$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} + \int_0^1 \frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}\,dx .$$

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \frac{1}{2n+3} .$$

Déduire de ce dernier résultat la belle formule :

$$\pi = 4.(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots)$$

et un algorithme rédigé en turbo-pascal qui calcule une valeur approchée de π à une précision donnée près.

15. Autour de la fonction $x \to \exp(-x^2)$. Introduction à la loi normale.

1°) Etudier $f : x \mapsto \exp(-x^2)$. Déterminer les points d'inflexion de C_f. Tracer C_f .

2°) Montrer que f est de classe C^∞ sur **R** et que pour tout entier naturel n il existe P_n polynôme de degré n tel que $\forall x \in \mathbf{R} \quad f^{(n)}(x) = P_n(x).\exp(-x^2)$.

3°) Soit $F(x) = \int_1^x \exp(-t^2)dt$. Montrer que F est croissante sur **R**. Montrer que pour tout $t \geq 1$: $\exp(-t^2) \leq \exp(-t)$. En déduire que F est majorée sur **R**.

Montrer que les intégrales : $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt$ sont convergentes.

4°) On admet que $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2)dt$.

Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)dt$ (changement de variable $y = \frac{t}{\sqrt{2}}$) ,

$\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}\right)dt$ (changement de variable).

5°) Soit $G(x) = \int_0^x t.\exp(-t^2)\,dt$. Calculer G(x). En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t.\exp(-t^2)\,dt$ est convergente . Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t.\exp(-t^2)\,dt$ est convergente et vaut 0.

6°) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.\exp(-t^2)\,dt$ est convergente et calculer sa valeur, à l'aide d'une intégration par parties.

Le résultat "établi" au 4) : $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-t^2/2)dt = \sqrt{2\pi}$ EST A CONNAITRE.

Comparaison d'une série et d'une intégrale

16. La série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente : démonstration par comparaison avec une intégrale généralisée. Démontrer successivement :

$$\forall\ n \in \mathbf{N}^* \ \ \forall\ t \in [n, n+1] \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \ ;$$

$$\forall\ n \in \mathbf{N}^* \quad \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \ ;$$

$$\forall\ N \geq 2 \quad \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \int_1^N \frac{dt}{\sqrt{t}} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

En déduire le résultat annoncé. Illustration graphique.

17. Série de Bertrand. **1°)** Montrer que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln(t))^2}dt$ est convergente et calculer sa valeur.

2°) En vous inspirant de l'exercice précédent, montrer que la série de terme général $\frac{1}{n(\ln(n))^2}$, $n \geq 2$, est convergente.

18. (isg 89) Pour n entier naturel non nul on définit la suite (S_n) par :

$$S_n = 1 + .\ \frac{1}{2^{1/3}} + \frac{1}{3^{1/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{1/3}}$$

1°) Justifier pour k entier naturel non nul l'encadrement :

$$\frac{1}{(k+1)^{1/3}} \le \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \le \frac{1}{k^{1/3}}$$

2°) En déduire l'encadrement :

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^{1/3}} \le S_n \le \int_1^{n} \frac{dx}{x^{1/3}} + 1.$$

3°) que peut-on dire de la suite (S_n) ?

4°) A l'aide d'encadrements analogues, montrer que la suite (T_n) définie par :

$$T_n = 1 + \frac{1}{2^{4/3}} + \frac{1}{3^{4/3}} + \ldots + \frac{1}{n^{4/3}}$$

est convergente.

Sommes de Riemann

19. Calculer les limites quand n tend vers $+\infty$ des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4}{n^5} \ ; \qquad n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+n^2} \quad \left(\text{rappel : } \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4}\right) ; \qquad \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right).$$

20. (esg 94 2e épreuve.) Soit k un entier naturel non nul et soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \qquad U_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n+1}\right)^k$$

1°) Déterminer la limite de cette suite pour k = 1, k =2, puis k = 3.

2°) Pour k quelconque > 0 déterminer la limite de la suite (U_n).

21. Soit n un entier ≥ 2 et $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right)$. Démontrer :

1°) $\forall\, k \in [[1, n-1]] \qquad \frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \le \int_{k/n}^{(k+1)/n} \ln(x)dx \le \frac{1}{n}\ln\frac{k+1}{n}.$

2°) $u_n \le \int_{1/n}^{1} \ln(x)dx \le u_n - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.

3°) $\frac{1}{n} - 1 \le u_n \le \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$.

4°) $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = -1.$

5°) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}.$

22. Pour $n \in \mathbf{N}$ on note $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$

1°) Montrer que pour tout k appartenant à [[0, n–1]] :

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{2^k} \leq \int_{k/n}^{(k+1)/n} 2^t dt \leq \frac{1}{n}\sqrt[n]{2^{k+1}} .$$

2°) En déduire un encadrement de u_n et la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.
3°) Retrouver cette limite en calculant u_n en fonction de n.

23. Soit f la fonction définie pour tout x strictement positif par :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x - \frac{1}{2}$$

1°) Etudier les variations de f. montrer que c'est une fonction convexe. Donner sa représentation graphique.
2°) Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0, +\infty[$. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

3°) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$

a) Etablir, pour tout entier j vérifiant $1 \leq j \leq n$, les inégalités :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{j+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{j}{n}}^{\frac{j+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{j}{n}\right)$$

b) en déduire l'encadrement :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx \leq S_n \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$$

c) Montrer les inégalités :

$$0 \leq \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$$

d) Montrer que la suite (S_n) est convergente et déterminer sa limite.

4°) On rappelle que pour tout entier naturel non nul n, on a l'égalité : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exprimer, pour tout entier naturel non nul n, la somme $\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right)$ en fonction de n. En déduire la limite : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$.

Annales E.S.C.L.

- **escl 88 1°)** Vérifier : $\forall$ x $\in$ $[0, +\infty[$ $0 \leq \ln(1 + x) \leq x$. En déduire la limite de quand l'entier n tend

vers $+\infty$ de $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.

2°) Soit u la suite réelle définie par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$. Montrer que pour tout entier naturel n non nul

$u_n = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$. (On pourra utiliser une intégration par parties.)

En déduire la limite de u_n et celle de $n.u_n$ quand n tend vers $+\infty$.

- **escl 89** Soit I la suite de terme général $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$

1°) **a)** Calculer I_0 et I_1.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $I_n \le \frac{1}{n+1}$. Etudier la convergence de la suite I.

2°) Calcul d'une valeur approchée de I_{15}.

a) Montrer que $\forall$ n $\in$ **N** $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1/e$, et :

$$I_n = \frac{n!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k)!} + \frac{n!}{(n+p)!}I_{n+p}$$

b) En déduire que pour tout n dans **N** :

$$0 \le I_n - \frac{n!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(n+k)!} \le \frac{n!}{(n+p+1)!} \le \frac{1}{(n+1)^{p+1}}$$

c) Comment peut-on choisir p pour que

$$0 \le I_{15} - \frac{15!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(15+k)!} < 10^{-6} \ ?$$

En déduire là l'aide de la calculatrice une valeur approchée de I_{15} à 10^{-6} près.

c*) Ecrire en turbo-pascal un programme qui affiche une valeur de $\frac{15!}{e}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{(15+k)!}$. p est fourni par l'utilisateur. On veillera à minimiser les calculs.

- **escl 90** Pour tout n dans **N**, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$$

1°) Quelle est la dérivée de la fonction f : **R** $\to$ **R** définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$? Calculer I_0.

2°) Calculer I_1.

3°) Montrer que pour tout n dans **N**, $0 \le In \le \frac{1}{n+1}$ En déduire la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$. Montrer que J_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4°) Etablir à l'aide d'une intégration par parties : $I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \frac{1}{n+1}J_n$.

Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

- **escl 91** Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 on pose :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx.$$

1°) Etude de la suite $(J_n)_{n\mu 1}$.

a) Calculer J_1.

b) Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1 $0 \le J_n \le 1/(n+1)$.

c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\mu 1}$.

2°) Etude de la suite $(I_n)_{n\ge 1}$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1 :

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}\ .$$

b) Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\ge 1}$.

c) Déterminer un équivalent de I_n quand n tend vers $+\infty$.

- **escl 92** Soit f : $]1, +\infty[$ τ **R** l'application définie par : $\forall x \in\ ]1, +\infty[\ \ f(x) = \dfrac{1}{x.\ln(x)}$.

1°) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

2°) Montrer que pour tout entier k tel que $k \ge 3$: $f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \le f(k-1)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \ge 2$ on note $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$.

3°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \ge 2$: $S_n - \dfrac{1}{2.\ln(2)} \le \int_2^n f(x)\,dx \le S_n - \dfrac{1}{n.\ln(n)}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{R}$ tel que $n \ge 2$:

$$\ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) \le S_n \le \ln(\ln(n)) - \ln(\ln(2)) + 1/2\ln(2)\ .$$

c) Etablir : $S_n \sim_{+\infty} \ln(\ln(n))$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \ge 2$ on note :

$$u_n = S_n - \ln(\ln(n+1)) \text{ et } v_n = S_n - \ln(\ln(n))\ .$$

4°) En utilisant le résultat de la question 2), montrer que les suites $(u_n)_{n\ge 2}$ et $(v_n)_{n\ge 2}$ sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

5°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ tel que $n \ge 2$: $0 \le v_n - \ell \le \dfrac{1}{n.\ln(n)}$

b) En déduire une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} prés.

b*) Ecrire un programme en turbo-pascal qui utilise le résultat du a) pour calculer et afficher une valeur approchée de ℓ à moins de e près, e étant un nombre réel > 0 fourni par l'utilisateur.

- **escl 93** Pour tout entier naturel n on pose :

$$I_n = \int_0^1 \exp(-x^2).(1-x)^n\,dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x.\exp(-x^2).(1-x)^n\,dx\ .$$

1°) a) Former le tableau de variations de f : $[0, 1] \to \mathbf{R}$, $x \to x.\exp(-x^2)$.

b) En déduire, pour tout n de **N** : $0 \le J_n \le \dfrac{1}{\sqrt{2e}.(n+1)}$.

c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout n de **N** :

$I_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{2}{n+1} J_{n+1}$. En déduire la limite de I_n et celle de nI_n quand n tend vers $+\infty$.

- **escl 94** On pose pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \int_1^e (\ln(x))^n\,dx$, et $I_0 = e - 1$.

1°) a) Etablir, pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

b) Montrer, pour tout entier naturel n : $I_n \geq 0$.

c) Déduire des questions a) et b) que, pour tout entier naturel n : $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

d) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

e) Montrer : $I_n \sim_{+\infty} \dfrac{e}{n}$.

2°) Soit a un réel différent de I_0 ; on note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+1} = e - (n+1)u_n \end{cases}$$

Montrer : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. (On pourra considérer la suite $(D_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $D_n = |u_n - I_n|$.)

- **escl 95** On définit la fonction $f : [2,+\infty[\to \mathbf{R},\ x \to \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

1°) Démontrer que pour tout réel x supérieur ou égal à 2 : $\dfrac{1}{x} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

2°) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'intégrale : $I_n = \int_2^n f(x)dx$.

a) Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

b) On définit la fonction $F : [2, +\infty[\to \mathbf{R}$, $x \to \ln(x + \sqrt{x^2-1})$. Calculer la dérivée de F, et en déduire une expression de I_n en fonction de n.

c) Déterminer la limite de $I_n - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3°) On définit, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $S_n = \sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}}$.

a) Montrer que : $I_{n+1} \leq S_n \leq I_n + 1/\sqrt{3}$.

b) Trouver un équivalent simple de S_n quand n tend vers $+\infty$.

- **escl 96** Pour tout entier naturel n on pose : $I_n = \int_0^1 x^n.e^{-x}dx$.

1°) a) Montrer que, pour tout entier naturel n : $0 \leq I_n \leq 1/(n+1)$.

b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et donner sa limite.

2°) A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \frac{1}{e(n+1)} + \frac{I_{n+1}}{n+1}.$$

3°) a) En déduire pour tout entier naturel n :

$$0 \leq I_n - \frac{1}{e(n+1)} \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

b) Trouver un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.

- **escl 98 1°)** Soit $x \in [-1,1[$. **a)** Montrer, pour tout n de **N** et tout t de $[-1, 1[$: $\dfrac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n} t^k = \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$.

b) En déduire, pour tout n de **N** et tout t de [–1, x] : $\left|\frac{1}{1-t}-\sum_{k=0}^{n} t^k\right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$.

c) Etablir, pour tout n de **N** : $\left|-\ln(1-x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}$.

d) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$ [sic] converge et a pour somme –ln(1 – x). En particulier, montrer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$ = ln(2).

2°) Un joueur lance une pièce de monnaie équilibrée jusqu'à l'obtention du premier pile. S'il lui a fallu n lancers (n ∈ **N***) pour obtenir ce pile, on lui fait alors tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant. Quelle est la probabilité que ce joueur gagne ?

- **escl 98 bis** (sujet de secours) Soit f la fonction réelle définie sur **R** par f(x) = $\frac{1}{x^4+1}$

1. Vérifier que f est paire et étudier les variations de f.

2. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int_x^{2x}\frac{1}{t^4+1}dt$ existe.

On définit la fonction réelle F sur **R** par F(x) = $\int_x^{2x}\frac{1}{t^4+1}dt$.

3.a. Etudier le signe de F.

b. Etudier la parité de F.

4. a. Montrer, pour tout réel x strictement positif $\frac{x}{16x^4+1} \leq F(x) \leq \frac{x}{x^4+1}$

b. En déduire les limites de F en –∞ et +∞.

5. a.Vérifier, pour tout réel x : $(1-14x^4)F'(x) \geq 0$.

b. Dresser le tableau des variations de F sur [0, +∞[.

On admettra qu'une valeur approchée de $14^{-1/4}$ est 0,52 et qu'une valeur approchée du maximum de F sur [0, +∞[f est 0,37.

c. Tracer la courbe représentative de F dans un repère orthonormé (unité 5 cm).

6. a. Montrer, pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{x}{16x^4(16x^4+1)} \leq \int_x^{2x}\frac{dt}{t^4} - F(x) \leq \frac{x}{x^4(x^4+1)}.$$

b.. En déduire que F(x) est équivalent à $\frac{7}{24x^3}$ au voisinage de +∞.

7. a. Montrer : ∀n ∈ **N** ∀t ≥ 0 $\left|\frac{1}{1+t^4}-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{4k}\right| \leq t^{4n+4}$.

b. En déduire que, pour tout réel x de]0, $\frac{1}{2}$[, la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{2^{4n+1}-1}{4n+1}x^{4n+1}$ converge.

c. Montrer, pour tout réel x de]0, 1/2[:

$$F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{2^{4n+1}-1}{4n+1}\,x^{4n+1}\,.$$

- **escl 99** Pour tout entier naturel n, on pose : $w_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt$.

  1. Calculer w_0 et w_1.
  2. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.
  3. Montrer, pour tout entier naturel n : $w_n \geq 0$. En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

  4. Soit $n \in \mathbf{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer : $w_{n+2}=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,\sin^2 t\,dt$. En déduire : $w_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}w_n$.

  5. Montrer pour tout entier naturel n, en utilisant **2.** Et **4.** : $0<\dfrac{n+1}{n+2}w_n \leq w_{n+1} \leq w_n$. En déduire : $w_{n+1} \sim_{n\to+\infty} w_n$.

  6. Montrer, en utilisant **4.** , que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de terme général $u_n=(n+1)w_nw_{n+1}$ est constante. En déduire : $w_n \sim_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

- **escl 2000** (également étude de fonctions) On considère la fonction f : $]-1;+\infty[\to \mathbf{R}$ définie , pour tout x de $]-1;+\infty[$, par :

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x=0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[.\end{cases}$$

1. a. Montrer que f est continue sur $]-1;+\infty[$.
b. Montrer que f est de classe C^1 sur]1, 0[et sur]0, +∞[$]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$.
Pour tout réel x de $]-1;0[\cup]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$.

c. Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque x tend vers 0.

d. En déduire que f est de classe C^1 sur $]-1;+\infty[$.

2. Montrer : $\forall x\in]-1;+\infty[,\ \dfrac{x}{x+1}-\ln(1+x)\leq 0$.
En déduire les variations de f . On précisera les limites de f en -1 et en $+\infty$.

3. Montrer que , pour tout x de l'intervalle $]-1/2, +\infty[$, l'intégrale $\int_x^{2x} f(t)dt$ existe .

4. On considère la fonction F définie, pour tout x de$]-1/2, +\infty[$, par :

$$F(x)=\int_x^{2x} f(t)dt\ .$$

a. Montrer que F est dérivable sur $]-1/2; +\infty[$et que F est croissante .
b. Montrer : $\forall x\in]0;+\infty[,\ F(x)\geq xf(2x)$.
c. En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.
d. Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)dt$ est convergente.

En déduire que la fonction *F* admet une limite finie en $-\frac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

- **escl 2001**, extrait ; cf chap VII.

1°) pour tout entier naturel n, on considère la fonction f_n : **R** → **R** définie par :

$$\forall t \in \mathbf{R},\quad f_n(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t}t^n}{n!} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

a) Soit n ∈ **N**. Montrer que $\lim_{t\to+\infty} t^2 f_n(t) = 0$. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$ est convergente.

b) Montrer : ∀n ∈ **N***, ∀X ∈ [0 ; +∞[, $\int_0^X f_n(t)\,dt = -\frac{e^{-X}X^n}{n!} + \int_0^X f_{n-1}(t)\,dt$.

c) En déduire : ∀n ∈ **N** , $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$.

- **escl 2002** On considère, pour tout n ∈ **N***, la fonction polynomiale P_n : [0 ; +∞[→ **R** définie, pour tout x appartenant à [0 ; +∞[, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Etude des fonctions polynomiales P_n

1°) Montrer, pour tout n ∈**N*** et tout x ∈ [0 ; +∞[: $P'_n(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}$,

où P_n désigne la dérivée de P_n.

2°) Etudier, pour n ∈ **N***, les variations de P_n sur [0 ; +∞[et dresser le tableau de variations de P_n.

3°) Montrer, pour tout n ∈ **N*** : $P_n(1) < 0$.

4°) a) Vérifier, pour tout n ∈ **N*** et tout x ∈ [0 ; +∞[:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right)$$

b) En déduire, pour tout n ∈ **N*** : $P_n(2) \geq 0$.

5°) Montrer que, pour tout n ∈ **N***, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue x ∈ [1 ; +∞[, admet une solution et une seule, notée x_n, et que $1 < x_n \leq 2$.

6°) Ecrire un programme en langage Pascal qui calcule et affiche une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

II. Limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$. **1°)** Etablir, pour tout n ∈ **N*** et tout x ∈ [0 ; +∞[: $P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt$

2°) En déduire, pour tout n ∈ **N*** : $\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\,dt$

3°) Démontrer, pour tout n ∈**N*** et tout t ∈ [1 ; +∞[: $t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$.

4°) En déduire, pour tout n ∈ **N*** : $\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2$, puis : $0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}}$

5°) Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

Annales E.S.C.

- **esc 97** Soit n un entier naturel non nul. On pose : $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$

  1. Calculer I_1.

  2. a) Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\geq 1}$.

  b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

  c) Montrer que, pour tout $x \in [1,e]$: $\ln(x) \leq x/e$.

  d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

  3. a) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul : $I_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} I_n$.

  b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

- **esc 98** Soit $I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$, $n \in \mathbf{N}$.

  1. Calculer I_0.

  2. (a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

  (b) Etablir que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

  (c) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente.

  3. (a) Justifier l'inégalité : $x^n \ln(1 + x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0, 1]$.

  (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$: $I_n \leq 1/(n+1)$

  (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

  4. (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que $I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.

  (b) Montrer que $0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx \leq \frac{1}{n+2}$ et en déduire un encadrement de I_n.

  (c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

- **esc 99** : voir chapitre VIII
- **esc 2001**, extrait. cf chap VIII

  1°) On pose pour tout entier naturel n non nul l'intégrale : $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^n} dt$.

  a) Calculer pour $A \geq 1$ l'intégrale $\int_1^A \frac{\ln t}{t} dt$ et en déduire que I_1 est divergente.

  b) Montrer grâce à une intégration par parties que pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'intégrale I_n converge et vaut $\frac{1}{(n-1)^2}$.

  c) Etudier les variations de la fonction f définie sur $[2 ; +\infty[$ par $f(t) = \frac{\ln t}{t^2}$ et donner sa limite en $+\infty$. (On donne $\sqrt{e} \approx 1{,}65$.)

  d) En déduire grâce à I_2 que $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln k}{k^2}$ converge (on ne cherchera pas à calculer cette série).

- **esc 2002** On considère, pour n entier naturel non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x) = \dfrac{n.Lnx}{n+1+nx^2}$ pour tout réel x strictement positif.

  On définit également sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction h par : $h(x) = \dfrac{Lnx}{1+x^2}$ pour tout x strictement positif.

  1°) Montrer que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.

  2°) a) Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \dfrac{Lnx}{x^2}.dx$ est convergente et déterminer sa valeur.

  b) Montrer que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} h(x).dx$ est convergente.

  Dans toute la suite de l'exercice on note alors K l'intégrale impropre : $K = \int_1^{+\infty} h(x).dx$.

  3°) a) Montrer, grâce au changement de variable $u = \dfrac{1}{x}$ que $K = -\int_0^1 h(u).du$.

  b) En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} |h(x)|.dx$ converge et est égale à $2K$.

  c) En déduire également que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} h(x).dx$ converge et vaut 0.

  4°) a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $|f_n(x)| \leq |h(x)|$.
  En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x).dx$.

  b) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $h(x) - f_n(x) = \dfrac{h(x)}{n+1+nx^2}$.

  c) En déduire successivement :

  $0 \leq \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x)).dx \leq \dfrac{K}{n+1}$

  $-\dfrac{K}{n+1} \leq \int_0^1 (h(x) - f_n(x)).dx \leq 0.$

  d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x).dx = 0$.

Annales EDHEC

- **edhec 93** Pour n appartenant à **N,** on pose : $I_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)dx$

  1°) a) Montrer que pour tout n dans **N** $0 \leq I_n \leq 1/(n+1)$.
  b) En déduire que la suite (I_n) converge vers 0.
  2°) Calculer Io et I_1.
  3°) Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} pour tout n supérieur ou égal à 2.
  4°) Démontrer par récurrence : $\forall$ p ≥ 1

  $$I_{2p} = (-1)^p \frac{2(2p)!}{\pi^{2p+1}} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \frac{(2p)!}{\pi^{2k+1}(2p-2k)!}$$

- **edhec 95** : voir chapitre IV, suites et séries

- **edhec 96, exercice 1** On considère la suite (d_n) définie par

  $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$ $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$.

  1°) a. Calculer d_2, d_3, d_4, d_5.

  b. Montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}$ $d_n \in \mathbf{N}$: $d_{n+1} = (n + 1)d_n + (-1)^{n+1}$

  2°) On considère, pour tout entier naturel n, l'intégrale $I_n = \dfrac{1}{n!}\int_0^1 t^n e^t dt$.

  a. Calculer I_0, puis exprimer, pour tout entier naturel n, I_{n+1} en fonction de I_n.

  b. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N}$ $e.d_n = n!\,(1 + (-1)^n I_n)$.

  c. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left|d_n - \dfrac{n!}{e}\right| \le \dfrac{1}{n+1}$.

  d. Vérifier que cette dernière inégalité détermine parfaitement d_n pour $n \ge 2$, puis retrouver la valeur de d_5 obtenue à la deuxième question et calculer d_{10}. On donne $\dfrac{5!}{e} \approx 44{,}15$ et $\dfrac{10!}{e} \approx 1334\,960{,}92$ à 5.10^{-3} près.

- **edhec 96, exercice 3** (également étude de fonction)

  1°) Montrer que pour tout $t > 0$: $\ln(1+t) > t/(1+t)$.

  2°) Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = e^{-x}.\ln(1+e^x)$.

  a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

  b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

  3°) a) Pour tout réel x, vérifier que : $f(x) = 1 - f'(x) - e^x/(1+e^x)$ En déduire, en fonction de f, une primitive F de f sur **R**.

  b) Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et donner sa valeur.

  4°) Soit a un réel et g la fonction définie par : $g(x) = 0$ si $x < 0$ et $g(x) = a.f(x)$ si $x \ge 0$. Déterminer a pour que g puisse être considérée comme densité d'une variable aléatoire X.

- **edhec 98** (extrait du problème ; voir chapitre VIII)

  On considère la fonction définie pour tout $x \ge 0$ par $f(x) = 1 - e^{-x}$.

  1°) a. Dresser le tableau de variation de f.

  b. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}$ $f(x) \le x$, l'égalité ayant lieu seulement pour $x = 0$.

  2°) a. Montrer que, pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

  $$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + (-1)^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^{-t}dt$$

  b. En écrivant l'égalité précédente pour n = 2, puis pour n = 3, montrer que :

  $$\forall x \in \mathbf{R}^+ \quad \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \le x - f(x) \le \frac{x^2}{2}$$

- **edhec 99** : voir chapitre VIII. Rien en 2000, guère plus en 2001, voir chapitre VIII.

- **edhec 2002** On note f la fonction définie sur **R**+ par : $\begin{cases} \forall x > 0, f(x) = \dfrac{-x \ln x}{1+x^2} \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1°) a. Vérifier que f est continue sur **R**+.
b. Etudier le signe de f(x).
2°) Montrer que l'on définit bien une fonction F sur **R**+ en posant :
$\forall x \in \mathbf{R}_+, F(x) = \int_0^x f(t)dt$
3°) Pour tout x de **R**+, on pose : g(x) = F(x) – x.
a. Montrer que g est dérivable sur **R**+ et que, pour x > 0, on peut écrire g'(x) sous la forme
$g'(x) = \dfrac{-x\,h(x)}{1+x^2}$
b. Etudier les variations de h, puis en déduire son signe (on donne $\ln \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx -0{,}48$).
c. En déduire le signe de g(x).
4°) On définit la suite (u_n) par la donnée de son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, valable pour tout n de **N** : $u_{n+1} = F(u_n)$.
a. Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} \in [0, 1]$.
b. Montrer, en utilisant le résultat de la troisième question, que (u_n) est décroissante.
c. En déduire que la suite(u_n) converge et donner $\lim_{n\to+\infty} (u_n)$.

- **edhec 2003** On note f la fonction définie, pour tout réel x strictement positif, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1) a. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, montrer que l'intégrale $I_n = \int_n^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

b. En déduire que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

2) Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente.

3) a. Établir que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$.

b. En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

4) Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Annales ECRICOME

- **ecricome 91** Pour n appartenant à **N** on pose : u(n) = $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^n}\, dx$. .

  1°) Calculer u(1).
  2°) Montrer que la suite $(u(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante et convergente.
  3°) Montrer que pour tout X appartenant à [0, 1]n, on a : $1 - X \leq \sqrt[3]{1-X} \leq 1 - X/3$.
  Interpréter graphiquement.
  4°) En déduire un encadrement de u(n) et la limite de u(n) quand n tend vers $+\infty$.

- **ecricome 92** On définit la suite u par $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2}(t)\, dt$.

  1°) a) Rappeler la valeur de la dérivée de la fonction tangente sur $]-\pi/2, \pi/2[$
  b) Calculer alors u_0.
  2°) Montrer que la suite u est décroissante.
  3°) Montrer que quel que soit n dans **N** : $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1}{2n+3}$.
  4°) En déduire que pour tout n dans **N** : $\dfrac{1}{2(2n+3)} \leq u_n \leq \dfrac{1}{2(2n+1)}$ puis donner un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
  5°) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{2k+1}$

  a) Montrer que pour tout n dans **N** : $S_n = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$
  b) En déduire la limite de S_n et un équivalent de $S_n - \pi/4$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- **Ecricome 93**

Soit x un réel strictement positif. On pose pour tout entier naturel n :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+x+1} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+x+1}.$$

On se propose d'étudier la limite S(x) de la somme $S_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1°) Pour tout entier naturel p on pose : $f_p(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{x+p}}{1+t} & si\ 0 < t \leq 1 \\ 0 & si\ t = 0 \end{cases}$,

et $I_p(x) = \int_0^1 f_p(t)dt$. Montrer que, pour tout entier naturel p, l'intégrale $I_p(x)$ existe.

2°) Montrer que pour tout réel $t \in [0, 1]$, on a : $\dfrac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + \dfrac{(-1)^{n+1} t^{n+1}}{1+t}$.

3°) Déduire de ce qui précède que l'on a :

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt \quad = \quad S_n(x) + R_n(x) \qquad \text{où} \quad R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+x+1}}{1+t} dt .$$

4°) Démontrer que l'on a pour tout entier naturel n : $0 \leq \int_0^1 \dfrac{t^{n+x+1}}{1+t} dt \leq \dfrac{1}{n+2}$.

5°) Conclure que l'on a : $S(x) = \int_0^1 \dfrac{t^x}{1+t} dt$.

6°) Etude du cas particulier où x = 1/2 .

a) En utilisant le changement de variable $u = t^{1/2}$, calculer S(1/2). *(Indication : $u^2 = 1 + u^2 - 1$.)*

(On rappelle que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$.)

b) En déduire que l'on a : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

- D'après **ecricome OG 93** **1°)** Soit f la fonction définie **sur]0,1]** par : $f(x) = \frac{-\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

Montrer que f est continue, décroissante, positive ou nulle sur]0, 1]. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2°) Pour n entier naturel supérieur ou égal à 2, on pose : $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$;

a) Pour k ∈ [[2, n]], montrer : $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(x)dx$.

b) Pour k ∈ [[1, n–1]], montrer : $\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

c) Déduire du a) et du b) : $\int_{1/n}^{1} f(x)dx \leq S_n \leq \int_{1/n}^{1} f(x)dx + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

3°) a) Soit a > 0. A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_a^1 f(x)dx$. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ est convergente et calculer sa valeur.

b) Quelle est la limite quand n tend vers +∞ de $\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$?

c) Déduire alors du 2)c) la limite de S_n quand n tend vers +∞.

4°) Ecrire en turbo-pascal un programme qui :

--- déclare la fonction f ;

--- utilise cette fonction pour calculer et afficher la valeur de S_n, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2 fourni par l'utilisateur.

5°) Déduire du 3)c) la limite de $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k}\right)^{1/\sqrt{kn}}$ quand n tend vers +∞.

- **ecricome 97** α est un réel strictement positif. Pour tout n ∈ **N**, on pose : $u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}$.

1. Étude de la convergence de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbf{N}}$.

a. Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbf{N}})$ est monotone et convergente. Que peut-on en déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?

On note $\ell(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbf{N}}$

b. On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer : $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \sim_{n\to+\infty} \frac{\alpha\,\ell(\alpha)}{n}$.

c. Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.

2. Dans cette question : $\alpha \in]0, 1]$.

a. Montrer que : $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_n(\alpha) \geq \dfrac{1}{n+\alpha}$.

b. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

3. 0n pose, pour tout entier naturel n : $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\left(1-e^{-t}\right)^n dt$.

a. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $I_n(\alpha)$ et calculer $I_0(\alpha)$.

b. Soit un réel x strictement positif. Intégrer par parties : $\int_0^x e^{-\alpha t}\left(1-e^{-t}\right)^n dt$, et en déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha+1)$, pour tout n entier naturel non nul.

c. En déduire que : $\forall\, n \in \mathbf{N} \quad I_n(\alpha) = u_n(\alpha)$.

4. On suppose désormais que $\alpha > 1$.

a. Montrer que, pour tout N entier naturel : $\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha-1} - I_{N+1}(\alpha-1)$.

b. En déduire que la série de terme général $u_n(a)$ est convergente, et donner en fonction de α la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha)$.

- **ecricome 98** (extrait ; voir chap VII) **1°)** Soit g l'application de $]0, +\infty[$ dans **R** définie par :

$x \to g(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et expliciter sa dérivée.

b) Dresser le tableau de variation de g avec ses éventuelles limites aux bornes.

2°) Soit f l'application de **R** dans **R** définie par $x \to f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$.

A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel x positif, on a :

$\int_0^x f(t)dt = g(e^x) + 2\ln(2)$.

- **ecricome 99** (extrait ; voir chapitre VII) On rappelle que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ converge et vaut $\dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Soit α un réel strictement positif ; si x est un élément de $\mathbf{R}^+$, on pose :

$I(x) = \int_0^x 2u^2 e^{-u^2} du$ et $J(x) = \int_0^x t^2 e^{-\left(t/\alpha\right)^2} dt$.

1°) a) A l'aide d'un changement de variable, exprimer, pour tout élément x de $\mathbf{R}^+$, J(x) en fonction de $I\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$.

1°) b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout élément x de $\mathbf{R}^+$:

$$I(x) = \int_0^x e^{-u^2} du - x\, e^{-x^2}.$$

1°) c) En déduire que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\left(t/\alpha\right)^2} dt$ converge et vaut $\dfrac{\alpha^3\sqrt{\pi}}{4}$.

• **ecricome 2002 FAIT**

On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définies sur]–1, +∞[par

$$f_n(x) = x^n \ln(1 + x).$$

1. Etude des fonctions f_n.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur]–1, +∞[par $h_n(x) = n\ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$.

1. Etudier le sens de variation des fonctions h_n.
2. Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de h_n.
3. Etude du cas particulier n = 1.
   a. Après avoir justifié la dérivabilité de f_1 sur]–1, +∞[, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
   b. En déduire les variations de la fonction f_1 sur 1–1, +∞[.
4. Soit $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$.
   a. Justifier la dérivabilité de f_n sur]–1, +∞[et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
   b. En déduire les variations de f_n sur]–1, +∞[. (On distinguera les cas n pair et n impair). On précisera les limites aux bornes sans étudier les branches infinies.

2. Etude d'une suite.

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ définie par : $U_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

2.1. Calcul de U_1.

1. Prouver l'existence de trois réels a, b, c tels que : $\forall x \in [0,1]\ \dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.
2. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$.
3. Montrer que $U_1 = 1/4$.

2.2. Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

1. Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est monotone.
2. Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ (on ne demande pas sa limite).
3. Démontrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^*\ \ 0 \le U_n \le \dfrac{\ln 2}{n+1}$
4. En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

2.3. Calcul de U_n pour $n \ge 2$.

Pour $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $S_n(x) = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$.

1. Montrer que $S_n(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx$.
3. En utilisant une intégration par parties dans le calcul de U_n, montrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$$

Annales ISC-ESLSCA

- **eslsca 93** On pose : $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ et : $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t.\ln(t)}$.

1°) Montrer que ces intégrales ont un sens lorsque x est un nombre réel strictement positif et différent de 1.
2°) Déterminer explicitement la fonction g.
3°) a) Montrer que la fonction f est dérivable sur son domaine de définition et déterminer sa fonction dérivée f.
b) Que vaut $\lim_{x \to 1} f'(x)$?
c) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
4°) a) Déterminer $\lim_{x \to 1} [f(x) - g(x)]$, et en déduire $\lim_{x \to 1} f(x)$.
b) Montrer que f ainsi prolongée est dérivable en 1.
5°) Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Déterminer l'allure de la branche infinie de (C) et enfin donner l'allure de (C).

- **eslsca 95** 1°) Pour tout réel $x > -1$ et pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

a) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout entier n et tout réel $x > -1$, on a :

$$I_{n+1}(x) = -I_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

b) Calculer $I_0(x)$, en déduire $I_1(x)$, puis $I_2(x)$.

2°) Prouver par récurrence que, pour tout réel $x > -1$,et pour tout entier $n > 0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \int_0^x \frac{(-1)^n (x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

(*Remarque* : ces deux questions prouvent en fait la formule de Taylor avec reste intégral dans un cas particulier ; celle-ci étant dorénavant au programme, entraînez--vous à l'appliquer pour obtenir directement le 2°).)
3°) Pour x compris entre 0 et 1, on considère la suite $u_n(x)$ définie par :

$$u_n(x) = \int_0^x \frac{(-1)^n (x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

Montrer que pour tout entier n de **N**: $|u_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$, en déduire la limite de la suite $(u_n(x))$.

4°) Pour x compris entre 0 et 1, on considère la suite $(v_n(x))$ définie pour $n > 0$ par :

$$v_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}.$$

Montrer que la suite $(v_n(x))$ converge et déterminer sa limite.

- **eslsca 96** (également étude de fonction)

Partie 1. Pour n dans **N** et x dans $\mathbf{R}^*$ on pose : $f_n(x) = x^n e^{-1/x} = x^n \exp(-l/x)$. (exp désignant la fonction exponentielle de base e).

l) Montrer que la restriction de f_n à $]0, +\infty[$ peut être prolongée par continuité en 0. Ce prolongement est-il dérivable ?

2) Déterminer les limites éventuelles de f_n en $-\infty$, $+\infty$ et en 0 par valeurs inférieures.

3) Etudier, suivant les valeurs de n les variations de f_n. En désignant par (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé, préciser les positions relatives de (Cn) et (C_{n+1}). Tracer dans le même repère (Co), (C_1),(C_2), (C_3).

.Partie 2. Pour n dans **N**, on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$.

l) Montrer que pour tout n dans **N,** I_n est bien défini. Etudier la monotonie de la suite (I_n).

2) A l'aide d'un encadrement simple, montrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Pour n dans **N,** déterminer une relation entre I_n et I_{n-1}. En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

- **eslsca 98** m et n étant deux entiers naturels quelconques, on pose : $I_{m,n} = \int_0^1 x^m (1-x)^n dx$.

1°) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour $m \geq 1$, on a : $I_{m,n} = \dfrac{m}{n+1} I_{m-1,n+1}$.

2°) Calculer $I_{0,m+n}$ et en déduire la valeur de $I_{m,n}$ pour tout couple d'entiers naturels m et n.

3°) a) Calculer, pour tout entier naturel n, $I_{n,n}$.

b) Montrer que l'on a : $\forall\, n \in \mathbf{N}\ \ I_{n,n} \leq 1/4^n$.

4°) Calculer la valeur de $J_{m,n} = \int_0^{\pi/2} [\cos(u)]^{2m+1}.[\sin(u)]^{2n+1} du$.

- **eslsca 99** On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par $\begin{cases} f(x) = -x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On pose, pour n entier naturel non nul , $I_n = \int_0^1 \left(f(x)\right)^n dx$.

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, l'intégrale I_n est bien définie.

   b) Calculer I_1. (On pourra, pour $\varepsilon > 0$, effectuer une intégration par parties dans l'intégrale $\int_\varepsilon^1 f(x)dx$, puis faire tendre ε vers 0.)

2. On pose, pour h et k entiers naturels non nuls, $J_{h,k} = \int_0^1 x^h (\ln x)^k dx$ et $J_{h,0} = \int_0^1 x^h dx$.

   a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour $h \geq 1$ et $k \geq 1$, on a :

   $J_{h,k} = -\dfrac{k}{h+1} J_{h,k-1}$.

   b) Calculer $J_{h,0}$. En déduire la valeur de $J_{h,k}$.

   c) Calculer I_n.



0.6 Calcul Intégrales

EXERCICE : 1

On définie la suite (I_n) en posant pour tout entier n

$$I \int_0^n x^2 \mathrm{e}^{-x} dx$$

1° justifier que (I_n) est une suite à termes positifs.

2° Montrer que (I_n) est croissante.

3° Exprimer I_n en fonction de n.

4° Déterminer la limite L de la suite (I_n).

5° Trouver le plus petit entier n tel que $|I_n - L| \leq 10^{-3}$

EXERCICE : 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & si \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et $\mathscr{C}$Sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal. On admet que est continue sur $\mathbb{R}$.

on se propose d'étudier la fonction définie sur par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$

On ne cherche pas à expliciter $F(x)$

1° Déterminer les variations de F sur $\mathbb{R}$

2° Justifier que pour tout x strictement positif, on a $\displaystyle\int_{-x}^0 f(t)dt = -\int_0^x f(t)dt$. En déduire que F est paire.

3° **a)** Déterminer le nombre dérivée df en 0.

b) Étudier la position de $\mathscr{C}$par rapport à sa tangente en 0.(on pourra utiliser que pour tout $X > 0, \quad \ln(1+X) \leq X$

c) En déduire que $0 \leq F(1) \leq \frac{1}{2}$

4° **a)** Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\frac{\ln(t^2)}{t} \leq \frac{\ln(1+t^2)}{t} \leq \frac{\ln(2t^2)}{t}$

b) En déduire que, pour tout $x \geq 1$, $F(x) - F(1) \geq 2\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$

c) Pour $x \geq 1$, Calculer $\int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$. En déduire le comportement de F en $+\infty$.

EXERCICE : 3

On désigne par f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

1° Étudier le sens de variations de f.

2° Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 8, on pose :

$$U_n = f(8) + f(9) + \cdots + f(n) = \sum_{k=8}^{k=n} f(k)$$

a)° Soit k un entier supérieur ou égal à 8. Démontrer que

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$$

b)° En déduire que pour tout $n \geq 8$;

$$U_{n+1} - f(8) \leq \int_8^{n+1} f(t)dt \leq U_n$$

c)° Calculer $\int_8^{n+1} f(t)dt$

d)° Déduire des question **b)** et **c**, que la suite (U_n) tend vers $+\infty$ quand n $+\infty$

3° Pour tout entier n supérieur ou égal à 8, on pose :

$$V_n = U_n - \int_8^{n+1} f(t)dt.$$

Étudier le sens de variations de la suite (U_n) et en déduire que :

$$U_{n+1} - f(8) \leq \int_8^{n+1} f(t)dt \leq U_n.$$

Puis que la suite (V_n) est bornée.

Montre que la suite (V_n) est croissante.

On admet que la suite (V_n) converge.

Démontrer que sa limite L vérifie $0 \leq L \leq 0,74$

EXERCICE : 4

Le but du problème est de montrer que le nombre e n'est un nombre rationnel **Partie A**

Sur f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 4 cm.

1° Étudier les variations de f. On précisera ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

2° Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

3° Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ et donner une interprétation géométrique de celle-ci.

Partie B

Pour tout entier $n \geq 1$, On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x} dx$

1° a°) Montrer que pour tout x de $[0 ; 1]$:

$$x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n.$$

b°) Exprimer en fonction de l'entier n l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 x^n dx$$

c°) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq I_n \leq \dfrac{e}{n+1}$

2° L'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

3° Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $K_n = n!e - I_n$

a°) Exprimer K_{n+1} à l'aide de K_n

b°) Calculer K_1 , (On pourra utiliser **A.3°**)

En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n , que K_n est un nombre entier pour tout $n \geq 1$

c°) Montrer que , quelque soit $n \geq 2$, le nombre $n!e = K_n + I_n$ n'est pas un nombre entier

4° Soit p et q deux entiers strictement positifs.

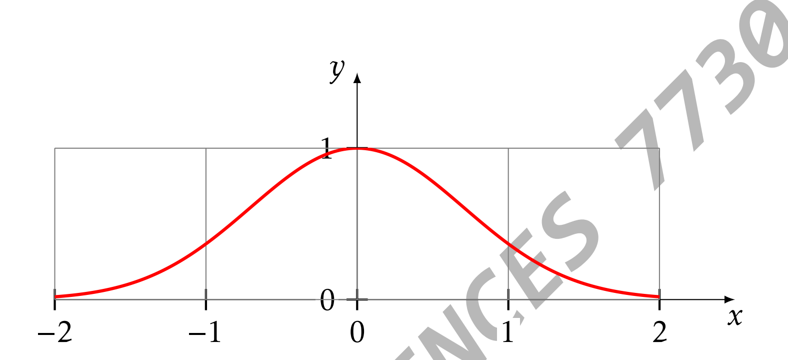
Montrer que, pour $n \geq q$, $\dfrac{n!p}{q}$ est un nombre entier.

En déduire à l'aide de **3°b)** et **c)** , que e n'est pas un nombre rationnel (on pourra raisonner par l'absurde)

EXERCICE : 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.

$f(x) = e^{(}-x^2)$



On se propose d'étudier la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2} dt.$$

(On ne chercher pas à calculer cette intégrale).

1° Étudier le sens de variation de F.

2° Interpréter géométriquement $F(x)$ pour x positif , pour x négatif .En déduire que F est impair.

3° a°) Vérifier que pour tout $t \geq 2$, on a $\mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-2t}$
En déduire que pour tout $x \geq 2$, on a :

$$F(x) - F(2) \leq \int_2^x \mathrm{e}^{-2t} dt.$$

b°) Calculer $\int_2^x \mathrm{e}^{-2t} dt$ En déduire que pour tout $x \geq 2$, on a $F(x) - F(2) \leq \frac{1}{2}e^{-4}$, puis que F est majorer sur $\mathbb{R}$

c°) En déduire que F admet une limite L en $+\infty$
Montrer que $0 \leq L - F(2) \leq 10^{-2}$.

d°) On considère les points $A_1, A_2, A_3 et A_4$ de la courbe $\mathscr{C}$D'abscisses respectives $0, \frac{1}{2}$, 1 , $\frac{3}{2}$ *et* 2 En utilisant la méthode des.

4° En rassemblant les résultats précédent , donner l'allure de la courbe représentative de F.

EXERCICE : 6

A. Questions préliminaires

1° On donne la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = e^t - t - 1$$

Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$ et donner son signe.

2° Déduire de cette les variations et le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par :

$$g(t) = e^t - \frac{t^2}{2} - t - 1$$

B. Fonction définie par une intégrale Pour $x \geq 1$, on pose

$$F(x) = \int_1^x \left(1 + \frac{t+1}{e^t - t - 1}\right) dt$$

1° Donner le signe de F sur $[1; +\infty[$

2° Montrer que pour tout $t \geq 0$

$$1 \leq 1 + \frac{t+1}{e^t - t - 1} \leq 1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}$$

3° Calculer $\int_1^x \left(1 + \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right) dt$ pour tout $x \geq 1$

4° a°) Justifier que $x \geq 1$

$$x - 1 \leq F(x) \leq 2\ln x - \frac{2}{x} + x + 1$$

b°) En déduire la limite de F en $+\infty$

5° a°) Montrer que pour tout $x \geq 1$

$$1 - \frac{1}{x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{2\ln x}{x} - \frac{2}{x^2} + 1 + \frac{1}{x}$$

b°) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x}$

EXERCICE : 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(0) = 1$ et pour $x \neq 0$, $\frac{x}{e^x - 1}$

1° a°) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b°) Calculer f' pour $x \neq 0$.

c°) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$g(x) = e^x - xe^x - 1$
Étudier les variation de g , puis le signe de g.
En déduire , pour tout x non nul , le signe de $f'(x)$.

d°) Donner les variations de f.

2° a°) Justifier pour tout réel x , l'existence de :

$$H(x) = \int_x^{2x} f(t)dt$$

On définie ainsi une fonction H sur $\mathbb{R}$.
On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormal

b°) Soit F la primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Exprimer H au moyen de F
En déduire que H est dérivable sur $\mathbb{R}$
Montrer que pour tout x non nul , on a :

$$H'(x) = \frac{x}{e^{2x} - 1}(3 - e^x)$$

c°) En déduire les variations de H

3° a°) Montrer en utilisant l'inégalité de la moyenne si x est non nul , $\frac{H(x)}{x}$ est compris entre $f(x)$ et $f(2x)$ (distinguer deux cas $x > 0$ et $x < 0$).

b°) Déterminer la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$

c°) Déterminer la limite de $\frac{H(x)}{x}$ lorsque x tend vers $-\infty$
En déduire la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$

d°) Interpréter les résultats précédent pour la courbe Γ

4° Quelle aire représente $H(\ln 3)$
Déterminer un encadrement de $H(\ln 3)$ Par la méthode des rectangles , en utilisant la subdivision :

$$\ln 3\,,\ \frac{4}{3}\ln 3\,,\ \frac{5}{3}\ln 3\,,\ 2\ln 3$$

On utilisera les valeurs approchées à 10^{-3} près des images par f des termes de la subdivision donnée.

5° Donner en tenant compte des résultats précédents, le tableau des variation de H , Puis l'allure de Γ

EXERCICE : 8

Soit f la fonction définie de $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = e^{-x}\sin x$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.
Pour tout entier k positif ou nul , on pose :

$$B_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)dx$$

1° a°) Sans calculer B_k déterminer le signe de B_k suivant la parité de l'entier k.

b°) Donner une interprétation géométrique de B_k suivant la parité de k

2° Calculer B_k et montrer que la suite (B_k) est géométrique , Préciser sa raison et son premier terme B_0

3° On pose $U_n = \sum_{k=0}^{k=n} B_k$

a°) Réduire U_n de deux manières différentes

b°) Déterminer la limite U de U_n en $+\infty$

4° On pose $V_n = \sum_{k=0}^{k=n} |B_k|$

a°) Donner une interprétation géométrique de $|B_k|$

b°) Réduire V_n

c°) Déterminer la limite V de V_n en $+\infty$

5° Vérifier que $\frac{1}{U} + \frac{1}{V} = \frac{2}{B_0}$

EXERCICE : 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x + \ln 4 + \frac{2}{e^x + 1}$$

et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère du plan.

1° Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$. **[0.5 pt]**

2° Calculer pour tout réel x , $f(x) + f(-x)$,
Que peut-on en déduire pour le point A$(0\,;\,1+\ln 4)$? **[0.5 pt]**

3° Étudier le sens de variation de la fonction f dresser son tableau de variation. **[0.5 pt]**

4° a°) Justifier que, pour tout réel m l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$ **[0.5 pt]**

b°) Déterminer un encadrement à 10^{-1} de la solution α de l'équation $f(x) = 3$
Justifier la réponse. **[0.5 pt]**

c°) Pour quel valeur de m le nombre $-\alpha$ est-il solution de l'équation $f(x) = m$? **[0.5 pt]**

5° a°) Montrer que pour tout réel x , $f(x) = x + 2 + \ln 4 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$ **[0.5 pt]**

b°) Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + \ln 4$ et la droite (Δ') d'équation $y = x + 2 + \ln 4$ son les asymptotes de la courbe $(\mathscr{C})$
Étudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à son asymptote (Δ). **[1 pt]**

6° On considère un réel positif λ.

a°) Que représente l'intégrale : $I(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\lambda} [f(x) - x - \ln 4]dx$? **[0.5 pt]**

b°) Montrer que $I(\lambda) = 2\ln\left(\dfrac{2e^{\lambda}}{e^{\lambda}+1}\right)$. **[1 pt]**

c°) Calculer λ pour $I(\lambda) = 1$, Puis donner une valeur approchée de λ à 10^{-1} près. **[1 pt]**

EXERCICE : 10

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$I_n = \int_0^2 \frac{e^{-t^2}}{1+t+n}dt$$

1° a°) Déterminer le sens de variation de cette suite . **[0.5 pt]**

b°) Montrer que (I_n) est une suite positive **[0.5 pt]**

c°) Montrer que pour tout $t \in [0;1]$ on a : $\dfrac{e^{-t^2}}{1+t+n} \leq \dfrac{1}{1+n}$ et en déduire que $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$
Que peut-on en conclure quant à la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$? **[1 pt]**

2° On considère f et g deux fonctions définies sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = e^{-x} + x - 1 \quad et \quad g(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$$

a°) Étudier le sens de variation et le signe de f. **[0.5 pt]**

b°) En déduire le sens de variation de g sur $[0\,;\,1]$. **[0.5 pt]**

c°) Établir pour tout x appartenant à $[0\,;\,1]$, l'encadrement : **[0.5 pt]**

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

d°) En déduire un encadrement de e^{-t^2} pour tout $t \in [0;1]$ **[0.5 pt]**

e°) Établir l'encadrement : **[0.5 pt]**

$$\frac{2}{3(n+2)} \leq I_n \leq \frac{23}{30(n+1)})$$

f°) Donner une valeur de p réel telle que $I_p \leq 10^{-2}$ **[0.5 pt]**

Série De Synthèse 10 : Calcul Intégral

Exercice 1 :

I) Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x - \frac{1}{\tan x})dx$ **2)** $\int_1^2 (\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{x})dx$ **3)** $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\tan \frac{x}{2} \ln(1+\cos x)dx$

4) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ **5)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx$ **6)** $\int_0^1 \frac{2e^{2x}}{(1-e^{2x})\ln(1-e^{2x})}dx$

7) $\int_{-1}^{1} \sin(|1-2x|-|1+2x|)dx$ **8)** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^3-\sin 2x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

II) Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration parties :

1) $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}dx$ **2)** $\int_0^{\pi} x^2 \sin^3 x dx$

3) $\int_e^4 x^3 \ln x dx$ **4)** $\int_1^e \ln x dx$

III) Calculer les intégrales à l'aide d'un changement de variable affine :

1) $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\sqrt{2x+1}dx$ **2)** $\int_0^2 \frac{x^2}{(x-1)^3\sqrt{x-1}}dx$

3) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}$ **4)** $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$

Exercice 2 :

On se propose de calculer $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}$.

1) Calculer $A = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}$ et $B = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

2) Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout réel t positif et non nul on ait :
$\frac{1}{(1+t)^2} = a + \frac{bt}{1+t} + \frac{ct}{(1+t)^2}$ (1)

3) En posant $t = e^x$ dans (1) calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$

4) **a)** A l'aide d'une intégration par partie exprimer J en fonction de I.

b) En déduire la valeur de J.

Exercice 3 :

On pose $K = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

1) Soit f la fonction de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

2) Calculer la fonction dérivée de f. En déduire la valeur de K.

3) On pose $J = \int_{\sqrt{2}}^2 \sqrt{x^2-1}dx$ Démontrer que$J = \int_2^{\sqrt{2}} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}dx - K$. Calculer J à l'aide d'une intégration par parties.

Exercice 4 :

On considère les intégrales :$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x} dx$ et $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx$

1) Calculer l'intégrale $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n x \cos x dx$ En déduire $I_{n+2} - I_n$en fonction de n.

2) Calculer I_1.En déduire I_3 et I_5.

3) a) Soit f l'application qui à $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ associe $f(x) = \ln(\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ Montrer que f est une primitive de la fonction g définie sur $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ par : $g(x) = \frac{1}{\cos x}$

   b) En déduire I_0, puis I_2 et I_4

Exercice 5 :

Soit (I_n) la suite définie par :$I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}$,$n \in \mathbb{N}$

1) Calculer I_1 puis $I_0 + I_1$. En déduire la valeur de I_0.

2) Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n. En déduire I_2 et I_3.

3) a) Montrer que, sans calculer, que (I_n) est croissante.

   b) Montrer que $\forall x \in [0;1]$, on a $\frac{e^{nx}}{1+e} \leq \frac{e^{nx}}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}e^{nx}$. En déduire un encadrement de I_n.

4) Déduisez-en la limite de la suite () (I_n) puis celle de $\frac{I_n}{e^n}$

Exercice 6 :

1) On pose $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x} dx$; $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x} dx$ et $I_1 + I_2 = I$.
Calculer I_1 puis I et en déduire I_2.

2) Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^2 x \, dx$

   a) Calculer $I + J$ et $I - J$ en effectuant une intégration par parties.

   b) En déduire I et J.

Exercice 7 :

Pour tout $n \leq 1$, on pose $I_n = \frac{1}{2^{n+1} n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}} dt$

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1

2) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, on a : $I_{n+1} = I_n - \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}$.

3) En déduire par récurrence que ,pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\sqrt{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k k!} + I_n$$

4) a) Montrer que l'on peut trouver une constante A telle que : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{n!}A$ On pourra déterminer A en majorant la fonction : $t \mapsto (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}$ sur l'intervalle $[0;1]$

b) En déduire la limite quand n tend vers l'infini de la suite (U_n) définie par :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2}.\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{2^n}.\frac{1}{n!}$$

c) Montrer que $0 \leq \sqrt{e} - U_n \leq \frac{1}{2^n n!}$ puis en déduire une approximation de $\sqrt{e}$ à 10^{-2} près.

Exercice 8 :

On considère la suite (U_n) définie par : $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \ln(n)$

1) Démontrer que $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

2) a) Pour k entier, compris entre 0 et $n-1$, démontrer que :

$$\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln(x)dx \leq \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$$

b) En déduire que :

$$U_n - \frac{1}{n}\ln 2 \leq \int_1^2 \ln x \leq U_n$$

3) Déduire de ce qui précède un encadrement de U_n et la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice 9 :

$\forall n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ la fonction ϕ_n par : $\forall n \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, $\phi_n(x) = \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}$ et $\phi_n(0) = 2n+1$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, ϕ_n est continue sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi_n(x)dx$ est constante.

Exercice 10 : Intégrale de WALLIS

Pour n nombre entier naturel, on considère le nombre réel I_n défini par : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$

1. Calculer I_0 puis I_1.

2. Établir, pour tout n nombre entier naturel supérieur ou égal à 2 , la relation de récurrence suivante : $nI_n = (n-1)I_{n-2}$

3. En déduire I_{2p} et I_{2p+1} pour p nombre entier naturel.

4. Établir que : $\forall\, p \in \mathbb{N}\ I_{2p} \geq I_{2p+1} \geq I_{2p+2}$. En déduire que : $\lim\limits_{p\to+\infty} \dfrac{I_{2p+1}}{I_{2p}}$.

5. Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} \left(\dfrac{1\times3\times5\times7\ldots\times(2p-1)}{2\times4\times6\times8\ldots\times2p}\right)^2 (2p+1)$

Exercice 11 :

1) Montrer que, pour tout réel x, on a : $e^x = 1 + x + \displaystyle\int_0^x (x-t)e^t dt$.

2) a) Montrer que, pour tout nombre entier naturel non nul n et pour tout nombre réel x , on a : $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}e^t dt$

b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel non nul, et pour tout nombre réel x on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt$$

3) Pour tout nombre entier naturel non nul n on considère : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}e^t dt$

Montrer que : $0 \leq I_n \leq \dfrac{e}{n!}$ (On remarquera que : $\forall\, t \in [0;1]\quad e^t \leq e$).

4) Soit (U_n) la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par : $U_n = 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$ Déduire des questions précédentes que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x - \ln x}{2\sqrt{x}}$.

1) On pose $J = \displaystyle\int_1^2 f(x)dx$

a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

b) En déduire la valeur de J.

2) a) Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.

b) Pour tout $n \geq$, on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{k}{n}\right)$ En utilisant les variations de f sur $]0;+\infty[$, montrer que pour k entier naturel vérifiant : $0 \leq k \leq n-1$, on a : $\dfrac{1}{n}f\left(1+\dfrac{k}{n}\right) \leq \displaystyle\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}f\left(1+\frac{k+1}{n}\right)$

3) En déduire que : $S_n + \dfrac{f(2)}{n} \leq J \leq S_n + \dfrac{f(1)}{n}$ puis que : $J + \dfrac{f(1)}{n} \leq S_n \leq J + \dfrac{f(2)}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 13 :

Calculer la limite des suites suivantes :

1) $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ **2)** $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n\pi}{k^2\pi^2+n^2}$

3) $\lim_{n\to+\infty} n\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$ **4)** $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)$

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \int_0^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f puis montrer que f est impaire.

2) Montrer que $\forall x > 0, 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2x}$ puis déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$. En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

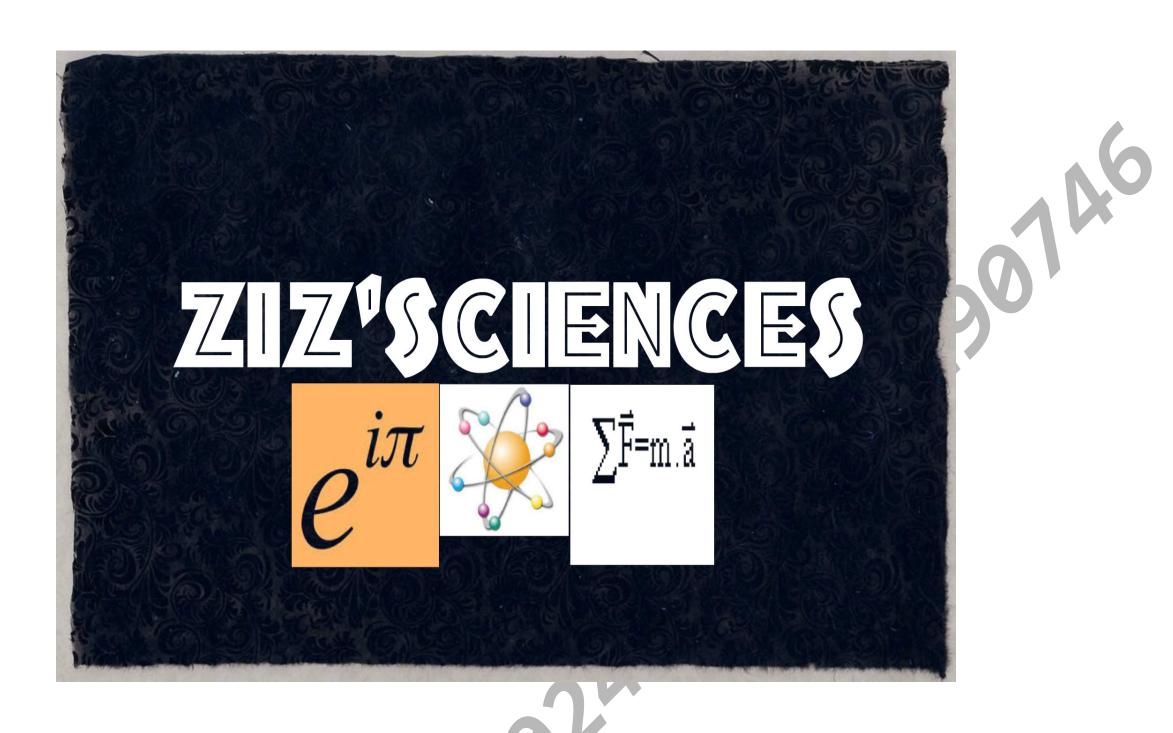
3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

4) Dresser le tableau de variations de f .

5) Tracer dans un repère orthonormé .

6) Calculer une valeur approchée de $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ à 0,01 près en utilisant la méthode des rectangles. (On partagera l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right]$ en 10 intervalles de mêmes amplitudes.)

FIN



0.7 Équations différentielles

0.7.1 Premier Ordre

0.7.2 Second Ordre

0.7.3 Exercices de synthèses

Exercice 1 :

Résoudre chacun des cas suivants les équations di érentielles vérifiant les conditions ini-tiales données :

1) $y'' - 2y' + y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 2$

2) $y'' + y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

3) $3y' + 7y = 0$ avec $y(2) = 5$

4) $y'' - 4y' + 3y = 0$ avec $y(0) = 6$ et $y'(0) = 10$

5) $y'' - 9y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

6) $y'' + 6y' + 9y = 0$ avec $y(0) = y'(0) = 1$

<u>**Exercice 2 :**</u>

Donner les solutions générales des équations différentielles suivantes après avoir trouvé leurs solutions particulières sous la forme indiquée :

1) $y'' + 2y' + 3y = \cos x$

2) $y'' - 2y' + 3y = e^{-x}\cos x$

3) $y'' + y' - 2y = \sin x$

4) $y'' + y' + y = xe^{-x}$

<u>**Exercice 3 :**</u>

Soit l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 8y = 20\sin(2x) + 10\cos(2x)$

1) Résoudre l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 8y = 0$ (E')

2) Déterminer les coefficients a et b tels que la fonction g définie par est solution de (E).

3) Démontrer que f est la solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E')

4) Donner la solution générale de (E).

<u>**Exercice 4 :**</u>

1) On donne l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 0$ (E_1)

a) Résoudre l'équation différentielle (E_1)

b) Déterminer la solution particulière f de (E_1) telle que$f(0) = 4$ et $f(1) = 3e$.

2) On considère maintenant l'équation différentielle : $y'' - 2y' + y = 2e^x$ (E_2

a) Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$ est solution de (E_2).

b) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^3 g(t)dt$

<u>**Exercice 5 :**</u>

1) Soit f la solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$ vérifiant $f(0) = 1$. Déterminer $f(x)$ pour tout réel x.

2) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie par $g(x) = (ax + b)f(x)$ soit solution de l'équation Différentielle $y' - 2y = e^{2x}$ et vérifie $g(0) = 1$.

3) Déduisez-en sans l'intégration par parties la valeur des intégrales :
$I = \int_0^1 (x+1)e^{2x}dx$ et $J = \int_0^1 (2x+1)e^{2x}dx$

<u>**Exercice 6**</u> : Bac S2 2009

1) Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + 2y' + y = 0$

2) Soit (E') l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = x + 3$ Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$ soit solution de (E').

3) **a)** Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - h$ est solution de (E)

b) Résoudre alors (E').

c) Déterminer la solution f de (E) telle que :et $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$

4) Soit la fonction k définie par : $k(x) = (x+2)e^{-x}$

a) Étudier les variations de k.

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de au point d'abscisse 0.

c) Démontrer que le point I (0 ;2) est un point d'inflexion de la courbe (C)

d) d) Tracer (C) et (T) dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$: $\vec{j}$).

Exercice 7 : Soit l'équation différentielle (1) : $y'' + 9y = 8\sin x$

1) On pose $y = z + \lambda \sin x$ où λ est un nombre réel.

a) Sachant que y vérifie l'équation (1), former l'équation a laquelle satisfait z.

b) Déterminer λ pour que cette équation soit réduite à $z'' + 9z = 0(2)$.

2) **a)** Résoudre l'équation (2). En déduire la solution générale de l'équation (1).

b) Déterminer la solution de (1) telle que $y(\frac{\pi}{3}) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 8 :

Soit α un nombre réel tel que : $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(1 + \cos(2\alpha))y'' - 2y'\sin(2\alpha) + 2y = 0$

Exercice 9 :

On considère l'équation différentielle (E) $x^2y'' - xy' + y = 0$

1) Soit z une fonction deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$. Démontrer que est solution de (E) si et seulement si est solution de l'équation différentielle (E')

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ (E') puis (E).

Exercice 10 : Bac S1 2005 **4 points**

Soit h la fonction définie sur $]0:+\infty[$ par $h(x) = x\ln x$, et $(\mathscr{F})$ l'ensemble des fonctions numériques f, dérivables sur $]0:+\infty[$, et telles que pour tout $t \in]0:+\infty[$ et pour tout $x \in]0:+\infty[$,

$$(\mathbf{1}) \quad f(tx) = tf(x) + xf(t)$$

1) Démontrer que pour tout réel k fixé la fonction kh appartient à $((\mathscr{F}))$. (On rappelle que $(kh)(x) = kh(x)$

2) Démontrer que si f appartient à $((\mathscr{F}))$, alors $f(1) = 0$. (On remarquera que) $(1 = 1 \times 1)$.

3) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

2) Soit (E') l'équation différentielle $y'' + 2y' + y = x + 3$ Déterminer les réels a et b tels que la fonction h définie par $h(x) = ax + b$ soit solution de (E').

3) **a)** Démontrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - h$ est solution de (E)

b) Résoudre alors (E').

c) Déterminer la solution f de (E) telle que :et $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$

4) Soit la fonction k définie par : $k(x) = (x+2)e^{-x}$

a) Étudier les variations de k.

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de au point d'abscisse 0.

c) Démontrer que le point I (0 ;2) est un point d'inflexion de la courbe (C)

d) d) Tracer (C) et (T) dans le repère orthonormé (O; $\vec{i}$: $\vec{j}$).

Exercice 7 : Soit l'équation différentielle (1) : $y'' + 9y = 8\sin x$

1) On pose $y = z + \lambda \sin x$ où λ est un nombre réel.

a) Sachant que y vérifie l'équation (1), former l'équation a laquelle satisfait z.

b) Déterminer λ pour que cette équation soit réduite à $z'' + 9z = 0(2)$.

2) **a)** Résoudre l'équation (2). En déduire la solution générale de l'équation (1).

b) Déterminer la solution de (1) telle que $y(\frac{\pi}{3}) = 0$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 8 :

Soit α un nombre réel tel que : $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(1 + \cos(2\alpha))y'' - 2y'\sin(2\alpha) + 2y = 0$

Exercice 9 :

On considère l'équation différentielle (E) $x^2y'' - xy' + y = 0$

1) Soit z une fonction deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$. Démontrer que est solution de (E) si et seulement si est solution de l'équation différentielle (E')

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ (E') puis (E).

Exercice 10 : Bac S1 2005 **4 points**

Soit h la fonction définie sur $]0:+\infty[$ par $h(x) = x\ln x$, et $(\mathscr{F})$ l'ensemble des fonctions numériques f, dérivables sur $]0:+\infty[$, et telles que pour tout $t \in]0:+\infty[$ et pour tout $x \in]0:+\infty[$,

$$(\mathbf{1}) \quad f(tx) = tf(x) + xf(t)$$

1) Démontrer que pour tout réel k fixé la fonction kh appartient à $((\mathscr{F}))$. (On rappelle que $(kh)(x) = kh(x)$

2) Démontrer que si f appartient à $((\mathscr{F}))$, alors $f(1) = 0$. (On remarquera que) $(1 = 1\times 1)$.

3) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

a) Démontrer que si f appartient à $((\mathscr{F}))$, alors pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$xf'(x) = f(x) + xf'(1)$$

b) On suppose que f appartient à $((\mathscr{F}))$, déduire du a) une équation différentielle vérifiée par fonction g.

4) Déterminer toutes les fonctions vérifiant la relation (1).

<u>**Exercice 11 :**</u> Compléments

I) On considère l'équation différentielle : $(E)\ :\ (1-x^2)y' + xy = x\sqrt{1-x^2}$, $x \in]-1;1[$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E')\ :\ (1-x^2)y' + xy = 0$. (Séparer les variables y et x).

2) Déterminer la fonction pour que $y_p = \lambda(x)\sqrt{1-x^2}$ soit solution de (E).

3) En déduire la solution générale de (E)

II) On considère l'équation différentielle : $(\mathrm{E}_1) : y' + \dfrac{\sin x}{\cos x}y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$, $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : y' + \dfrac{\sin x}{\cos x}y = 0$. (Séparer les variables y et x).

2) Déterminer la fonction μ pour que $y_p = \mu(x)\cos x$ soit solution de (E_1)

3) En déduire la solution générale de (E_1)

<u>**Exercice 12 :**</u> **BAC 2006 S1** **4 points**

1) On considère l'équation différentielle : $y' + y = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{2+\sin x}$ (**E**). f est une fonction numérique dérivable sur Δ, on pose : $g(x) = \mathrm{e}^x f(x)$.

a) Montrer que f est une solution de (**E**) si et seulement si $g'(x) = \dfrac{\cos x}{2+\sin x}$.

b) Déterminer la solution générale de (**E**), en déduire la solution de (**E**) qui s'annule en 0.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct, on considère la courbe (Γ) d'équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \ln(2+\sin t) \\ y(t) = \ln(2+\cos t) \end{cases} \quad t \in \Delta$

a) Comparer $M(t)$ et $M(t+2\pi)$ ainsi que $M(t)$ et $M\left(-t+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) En déduire que la symétrie orthogonale d'axe la première bissectrice conserve (Γ) et montrer que pour construire (Γ), il suffit d'étudier x et y dans $\left[\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{\pi}{4}+\pi\right]$.

c) Dresser le tableau de variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ dans $\left[\dfrac{\pi}{4}\ ;\ \dfrac{5\pi}{4}\right]$ et tracer la courbe Γ

<u>**Exercice 13 :**</u> **BAC 2000 S1** **4 points**

1) Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$y'' + y' = 0 \quad (1)$$

2) Étant donnée une fonction numérique de variable réelle, g, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$; On définie la fonction f de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$· Exprimer $f''(x)$ à l'aide de $g''\left(\frac{1}{x}\right)$ et de x.

3) On considère l'équation différentielle :

$$y'' = \frac{1}{x^4}y \quad (2)$$

a) Démontrer que la fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$ est solution de (2) si et seulement si la fonction f définie par : $\forall\, x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$ est solution de (**1**)

b) En déduire l'ensemble des solutions de (**2**) définies sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;\,+\infty[$

4) Soit g une solution de l'équation (**2**) définie sur $]0\,;\,+\infty[$· Déduire de ce qui précède une primitive de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x^4}g(x)$.

<u>Exercice 14 :</u> BAC 1995 S1 **4 points**

Dans cet exercice, on cherche à calculer l'intégrale :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\sin(2x) + e^{-x}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right] dx$$

à l'aide d'une équation différentielle.

1) Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \quad (\mathbf{E}_1)$$

2) On considère l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + 2y = 4\cos(2x) - 4\sin(2x) \quad (\mathbf{E})$$

a) Déterminer deux réels a et b pour que la fonction f_1 définie par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f_1(x) = a\sin(2x) + b\cos(2x)$$

soit solution de l'équation (**E**).

b) f désignant une fonction numérique, On désigne par g la fonction $f - f_1$. Démontrer que f est solution de (**E**) si et seulement si g est solution de ($\mathbf{E}_1$).

c) En déduire la forme générale des solutions vérifiant l'équation (**E**)

3) a) Vérifier que la solution f de (**E**) telle que :

$f(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $f'(0) = 2$ est $f(x) = \sin(2x) + e^{-x}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

b) Utiliser (**E**) pour trouver l'ensemble des primitives F de f.

c) En déduire la valeur de l'intégrale I.

Problème 1 : BAC 1996 S1 **4 points**

Partie A :

1) Soient f une fonction numérique dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$.
Soit (**E**) l'équation : $xy' - 2y = \ln x$; on dit que f est solution de (**E**) si et seulement si, pour tout x appartenant à $]0\,;+\infty[$: $xf'(x) - 2f(x) = \ln x$
(f' désigne la dérivée de f).
Démontrer que f est solution de (**E**) si et seulement si g est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction : $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^3}$.

2) Quelle l'ensemble des primitives de la fonction : $x \mapsto -\dfrac{\ln(x)}{x^3}$? (On pourra faire une intégration par parties).

3) En déduire que l'ensemble des solutions de (**E**) est l'ensemble des fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$x \mapsto -\frac{1+\ln(x^2)}{4} + ax^2,$$

où a désigne une constante réelle arbitraire.

4) On désigne par ϕ la fonction :

$$x \mapsto -\frac{1+\ln(x^2)}{4} + \frac{1}{4}x^2, \quad \text{où} \quad x \in]0\,;+\infty[$$

Étudier la variation de ϕ et construire sa courbe représentation graphique dans un repère orthonormé.

Partie B :

1) Soit λ un nombre réel strictement positif. Calculer en fonction de λ l'intégrale :

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} \varphi(x)\mathrm{dx}$$

.

2) Montrer que, lorsque λ tend vers 0, $I(\lambda)$ admet une limite égale $\dfrac{1}{3}$.

3) Soit n un entier supérieur égal à 2. Montrer que, pour tout entier k tel que : $1 \leq k \leq n-1$ et pour tout réel x tel que : $\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq x \leq \left(\dfrac{k+1}{n}\right)$, on a : $\varphi\left(\dfrac{k}{n}\right) \leq x \leq \varphi\left(\dfrac{k+1}{n}\right)$.

Montrer que : $$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$

En déduire : $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right)+I\left(\frac{1}{n}\right)$.

4) Déduire des questions 2) et 3) que, lorsque n tend vers l'infini, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ admet une limite la calculer.

5) **a)** Montrer que : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) - \frac{1}{4}$

b) Établir les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n}{k}\right) = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

6) **a)** Utiliser les résultats précédentes pour démontrer la suite :

$$n \mapsto v_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right)$$

a une limite que l'on précisera.

b) En déduire que la suite $n \mapsto u_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ a une limite que l'on précisera.

FIN

0.8 Géométrie Dans Le Plan

0.8.1 Barycentre et Produit Scalaire

Classe : TS1

Série 3 : Barycentres lignes et surfaces de niveau

Exercice 1 :

On considère l'application g du plan dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M associe le réel $g(M)$ défini par : $g(M) = \alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2$ et G le barycentre des points pondérés (A,α), (B,β) et (C,γ).

1) Démontrer que

$$g(M) = (\alpha+\beta+\gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2$$

2) Déterminer $g(A)$, $g(B)$ et $g(C)$.

0.1 Arithmétique

0.1.1 Divisibilité et Récurrence

0.1.2 Congruences

0.1.3 Nombres Premier - Bézout-Gauss

0.1.4 PGCD-Équations Diophantiennes

0.1.5 PPCM-Systèmes D'équations

0.1.6 Critères de divisibilité

0.1.7 Système De Numération

EXERCICE : 1 On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 et à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.
2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.
3. En considérons tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.
4. a. Soient a, b et c trois entiers naturels.
   Démontrer que si a divise c et b divise c , avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

   b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.

5. Existe - t - il quinze nombres premiers p_1, p_2, $\cdots$, p_{15} supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \cdots + p_{15}^4$ soit un nombre premier.

EXERCICE : 2

Partie A

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$.
2. En déduire que $x^4 + 4$ peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients entiers.

Partie B

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A = n^2 - 2n + 2$ et $B = n^2 + 2n + 2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.

2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n , divise 2.

3. Montrer que tout diviseur commun de A et B divise $4n$.

4. Dans cette question, on suppose que n est impair.

  a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

  b. Montrer que d divise n.

  c. Montrer que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5. On suppose maintenant que n est pair.

  a. Montrer que 4 ne divise pas $n^2 - 2n + 2$.

  b. Montrer que d est de la forme $d = 2p$, ou p est impair.

  c. Montrer que p divise n. En déduire que $d = 2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question **4.**)

Série de Synthèse 15 : Arithmétique

Exercice 1 :

Déterminer les couples (a ; b) d'entiers naturels tels que :

1-) $a + b = 5664$ et $PGCD(a,b) = 354$ avec $a < b$

2-) $PGCD(a,b) = 5$ et $PPCM(a,b) = 60$

3-) $PGCD(a,b) + PPCM(a,b) = b + 9$

4-) $a + b = 56$ et $PPCM(a,b) = 180$ avec $a > b$

5-) $2m + 3d = 78$ avec $m = PPCM(a,b)$, $d = PGCD(a,b)$ et $a < b$

Exercice 2 :

I-) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations suivantes :

1- $xy = 2x + 3y$ **2-** $336x + 210y = 294$ **3-** $3675x - 5145y = 4410$

4- $95x + 17y = 46$ **5-** $20x - 53y = 3$ **6-** $23x + 56y = 3$

7- $x^2 + x + 4 \equiv 0[3]$ **8-** $x^2 - y^2 - 4x - 2y = 5$

II-) 1-) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3x \equiv 1[5]$

2-) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $5x \equiv 2[7]$

3-) Résoudre le système formé par les deux équations précédentes.

4-) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ le système : (S) $\begin{cases} x \equiv 3[17] \\ x \equiv 4[11] \\ x \equiv 5[6] \end{cases}$

Exercice 3 :

I-) 1-) Vérifier que 999 est divisible par 27.

2-) En déduire que, pour tout entier naturel n ,. $10^{3n} \equiv 1[27]$

3-) $A = 10^{100} + 100^{10}$. Quel est reste de la division euclidienne de A par 27 ?

II-) 1-) Déterminer $d = PGCD(9042;1881)$

2-) En déduire l'ensemble des diviseurs de communs de 9042 et 1881

3-) Déterminer les entiers relatifs u et v tels que : $9042u + 1881v = d$.

Exercice 4 :

Soit a et b deux entiers naturels non nuls, A et B les nombres tels que : $A = 3a + 4b$ et $B = 4a + 5b$.

1-) Montrer que tout diviseur commun à a et b est diviseur de A et B. En déduire que $D(a;b) \subset D(A;B)$

2-) Exprimer a et b en fonction de A et de B. En déduire que $D(A,B) \subset D(a,b)$

3-) Montrer que a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, A et B le sont.

Exercice 5 :

1-) Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $PGCD(a+b, ab) = p$, où p est un nombre premier .

a-) Démontrer que p divise a^2 (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$).

b-) En déduire que p divise a. On constate donc, de même, que p divise b.

c-) Démontrer que $PGCD(a,b) = p$

2-) On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leq b$

a-) Résoudre le système suivant : $\begin{cases} PGCD(a,b) = 5 \\ PPCM(a,b) = 170 \end{cases}$

b-) En déduire les solutions du système : $\begin{cases} PGCD(a+b,ab) = 5 \\ PPCM(a,b) = 170 \end{cases}$

Exercice 6 :

Partie A :

1-) Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

2-) Démontrer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

Partie B :

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant : (S) $\begin{cases} n \equiv 13[19] \\ n \equiv 6[12] \end{cases}$

1-) Démontrer qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u;v)$ tel que : $19u + 12v = 1$(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple) Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 6 \times 19u + 13 \times 12v = 6$ est solution de (S).

2-) a-) Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système équivaut à : $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$

b-) Démontrer que le système $\begin{cases} n \equiv n_0[19] \\ n \equiv n_0[12] \end{cases}$ équivaut à $n \equiv n_0[12 \times 19]$

3-) a-) Trouver un couple (u,v) solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de n correspondante.

b-) Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (On pourra utiliser la question 2-b-)).

4-) Un entier naturel est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13. On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

Exercice 7 :

1-) a-) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n^2 + 11n + 48$, est divisible par $n + 3$

b-) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n^2 - 9n + 16$, est un entier naturel non nul.

2-) Montrer que, pour tous $a, b, c \in \mathbb{N}$, l'égalité suivante est vraie : $PGCD(a,b) = PGCD(bc - a, b)$.

3-) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$, l'égalité suivante est vraie : $PGCD(3n^2 + 11n + 48, n + 3) = PGCD(48, n + 3)$

4-) a-) Déterminer l'ensemble diviseurs entiers naturels de 48.

b-) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que : $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3} \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 : Bac S_1 2000 / 2ème groupe

1-) Décomposer 319 en produit de facteurs premiers.

2-) Démontrer que si x et y sont premiers entre eux alors $3x+5y$ et $x+2y$ sont premier entre eux .

3-) Résoudre dans $\mathbb{N}^*$le système suivant : $\begin{cases} (3a+5b)(a+2b) = 12765 \\ ab = 2m \end{cases}$ où m est le PPCM de a et b.

Exercice 9 :

1-) Trouver, suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes de la division euclidienne de 5^n par 13.

2-) En déduire que $1981^{1981} - 5$ est divisible par 13.

3-) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 2$, le nombre $N = 31^{4n+1} + 18^{4n-1}$ est divisible par 13.

Exercice 10 :

1-) Montrer que si PGCD(a , b) = 1 alors $PGCD(a^2, b^2) = 1 \quad \forall(a,b) \in \mathbb{N}^2$.
On se propose de calculer. $PGCD(S_n, S_{n+1})$

2-) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. Démontrer que .$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3-) On suppose que n est pair $n = 2k$: ,$k \in \mathbb{N}^*$

a-) Montrer que $PGCD(S_{2k}, S_{2k+1}) = (2k+1)^2$

b-) Déterminer $PGCD(k^2, (k+1)^2)$, $PGCD(k, k+1)$ et $PGCD(S_{2k}, S_{2k+1})$

4-) a-) On suppose que n est impair : $n = 2k+1$;,$k \in \mathbb{N}$. Montrer que $PGCD(S_{2k+1}, S_{2k+3})$

b-) Déterminer.$PGCD(S_{2k+1}, S_{2k+2})$

5-) Montrer qu'il existe un unique entier naturel tel que $PGCD(S_n, S_{n+1}) = 1$

Exercice 11 :

On rappelle le petit théorème de Fermat : Si est un nombre entier premier qui ne divise pas l'entier naturel a alors on la congruence $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

Partie A :

1-) a-) Montrer que 29 est un nombre premier

b-) Soit $x \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \equiv 1[28]$ .En utilisant le petit théorème de Fermat, montrer que $x^n \equiv x[29]$

2-) On considère l'équation $17x - 28y = 1$ où . $(x,y) \in \mathbb{N}^2$

a-) Quel théorème permet d'affirmer que l'équation (E) admet au moins un couple solution d'entiers relatifs.

b-) En utilisant l'algorithme d'Euclide, trouver un tel couple solution.

Partie B :

Soit $A = \{x \in \mathbb{N}, x < 29\} = 0,1,2,\dots,28$ .Pour, $x \in A$ on note $f(x)$ le reste de la division euclidienne de x^{17} par 29 et $\lg(x)$ le reste de la division euclidienne de x^5 par 29 .

1-) Montrer que $f(x) \in A$ et $x^{17} \equiv f(x)[29]$. On admettra de même que $g(x) \in A$ et $x^5 \equiv g(x)[29]$

2-) Pour $x \in A$, montrer que $g[f(x)] = x$

Exercice 12 : Bac S_1 2009 /2ème groupe

1-) En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le PGCD de 231 et 3311

2-) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On pose : $A_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ et $B_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.
Démontrer que $A_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ et $B_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

3-) a-) Démontre que pour $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2}k(3k+1)$ est un entier.

b-) On suppose que n est multiple de 3. Déterminer le PGCD de A_n et B_n

c-) Vérifier que le résultat obtenu dans le cas où $n = 21$

Exercice 13 :

Dans un système de numération de base n, on considère les nombres : $A = \overline{211}$, $B = \overline{312}$ et $C = \overline{133032}$

1-) Sachant que $C = AB$, montrer que n divise huit. En déduire la valeur de n.

2-) Écrire A, B et C dans le système décimal.

3-) Déterminer les solutions dans $\mathbb{Z}^2$, de l'équation $(E) : Ax + By = 1$.

FIN

3) Montrer que :

$$\alpha g(A)+\beta g(B)+\gamma g(C)=2(\alpha+\beta+\gamma)g(G)$$

.

4) En déduire que :

$$g(G)=\frac{\beta\gamma BC^2+\gamma\alpha AC^2+\alpha\beta AB^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

5) Application

a) Construire le barycentre G des points $(A,-1)$, $(B,4)$ et $(C,1)$.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que :

$$-MA^2+4MB^2+MC^2=\frac{a^2}{2}\cdot$$

Exercice 2 :

On considère un triangle quelconque ABC tel que $AB=c$, $AC=b$ et $BC=a$. Soit G le barycentre des points pondérés $(A,1)$, $(B,-1)$ et $(C,2)$.

1) Construire le point G .Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.

2) Soit $f(M)=MA^2-MB^2+2MC^2$.
Montrer que :

$$f(M)=2MG^2+GA^2-GB^2+2GC^2.$$

3) Calculer GA^2, GB^2 et GC^2

4) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$f(M)=a^2+b^2$$

Exercice 3 :

On considère un triangle ABC et on désigne par G son centre de gravité. Soit φ l'application définie du plan $(\mathscr{P})$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout point M associe :

$$\varphi(M)=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$$

.On désigne par f fonction scalaire de Leibniz associée au système $\{(A,1);(B,1);(C,1)\}$.

1) Démontrer que pour tout point M : $\varphi(M)=3MG^2+\varphi(G)$ et $\varphi(G)=-\frac{1}{2}f(G)$.

2) Calculer $f(G)$ en fonction de AB ,AC et BC .En déduire l'expression de $\varphi(M)$ en fonction de MG , AB, AC et BC.

3) On suppose que le triangle ABC est équilatéral de coté a. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{a^2}{4}\leq\varphi(M)\leq\frac{a^2}{4}$.

Exercice 4 :

1) Soit ABC un triangle tels que : $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MB^2 + MC^2 - 2MA^2 = b^2 + c^2$$

2) Soit G les barycentre des points pondérés (A, α), (B, β) et (C, γ). Soit (E) l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = 1$$

a) Montrer que si A, B et C sont des éléments de (E) alors $\alpha = \dfrac{\cos \hat{A}}{bc}$ $\beta = \dfrac{\cos \hat{B}}{ac}$ et $\beta = \dfrac{\cos \hat{C}}{ab}$

b) Montrer que, pour les valeurs de α, β et γ trouvés en a),(E) est un cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 5 :

On considère un triangle ABC de l'espace. Montrer que chacun des ensembles suivants est un plan dont on précisera un point et un vecteur normal.

a) $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})\overrightarrow{AC} = 0$

b) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})\overrightarrow{AB} = 0$

c) $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})(2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$

Exercice 6 :

On donne dans l'espace quatre points A, B, C et D non coplanaires. Soit I le milieu de [AB], J le milieu de [CD] et G le milieu de [IJ].

1) Peut - on avoir I=J ? Existe-t-il des points de l'espace tels que :

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$$

? Justifier votre réponse.

2) Déterminer l'ensemble (P_1) des points M de l'espace tels que :

$$\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$$

3) Déterminer l'ensemble (P_2) des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 = MC^2 + MD^2$$

Peut - on avoir (P_1)=(P_2) ?

Exercice 7 :

Soit ABC un triangle, on pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$; A' est le milieu de [BC], B' celui de [AC] et C' celui de [AB] .Soit G l'isobarycentre du triangle ABC.

1) Montrer que, pour tout point M du plan on a :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

2) En calculant de deux façons différentes $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$, établissez que :

$$2\overrightarrow{MA}\,\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB}\,\overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{6}$$

3) On considère les points communs aux cercles de diamètres [AA'] et [BC]. Montrer que lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a b et c.

Exercice 8 :
Soit a un nombre réel strictement positif .Soit ABCD tétraèdre régulier d'arête de longueur a.

1) Soit A' l'isobarycentre du triangle BCD. Déterminer le nombre réel m tel que le point G, milieu de [AA'], soit barycentre du système (A, m) ,(B,1) ,(C,1), (D,1).Placer ces points sur une figure . Calculer GA^2 et GB^2 en fonction de a.

2) Déterminer l'ensemble (Σ) des points M de l'espace tels que :

$$6MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 + 2MD^2 = 5a^2$$

3) Déterminer l'ensemble (pi) des points M de l'espace tels que :

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3MA^2 = a^2$$

Vérifier que (π) est le plan médiateur de [AA'].

4) Déterminer l'intersection (C) de (Σ) et (Π); et prouver que les milieux I ,J, K des segments [AB], [AC] ,[AD] appartiennent à (C). Placer sur la figure.

Exercice 5 : Soit A, B, C trois points non alignés du plan tels que le tringle ABC ne soit pas équilatéral. On désigne par A', B' et C' les milieux respectifs des segments [BC] ,[CA] et [AB].On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

1) On considère le vecteur $\vec{u} = a^2\overrightarrow{BC} + b^2\overrightarrow{CA} + c^2\overrightarrow{AB}$.
Montrer que $\vec{u} = (a^2-b^2)\overrightarrow{AC} + (c^2-a^2)\overrightarrow{AB}$. En déduire que $\vec{u}$ n'est pas un vecteur nul.

2) Pour tout point M du plan, on pose :

$$f(M) = a^2\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{MA'} + b^2\overrightarrow{CA}\,\overrightarrow{MB'} + c^2\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{MC'}$$

a) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Calculer $f(0)$.

b) Soit G le centre de gravité du triangle ABC.
Montrer que $\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{GA'} = \frac{1}{6}(b^2-c^2)$. En déduire $f(G)$.

c) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que $f(M) = 0$.

FIN

0.8.2 Angles et Points Cocycliques

Série d'exercice 7 : Points cocycliques

Exercice 1 On considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{3}$

1) Faire une figure.
2) En utilisant la relation de Chasles , prouver que : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$
3) En déduire la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 2

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles sécantes en A et B de centre respectifs O et O' tels que : $(\overrightarrow{AO'}, \overrightarrow{AO}) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$. Soit MM un point de $(\mathscr{C})$ distinct distinct de A et B tel que la droite (MA) recoupe $(\mathscr{C}^{prime})$(C') en C et (MB) recoupe $(\mathscr{C}')$ en D.

1) Que représente (AO') pour $(\mathscr{C})$(C)? En déduire que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{AO'}, \overrightarrow{AB})[\pi]$.
   Démontrer de même que : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})[\pi]$.
2) Montrer que les points C et D sont diamétralement opposés.

Exercice 3

On donne un triangle ABC et le point F diamétralement opposé à A sur le cercle passant par ABC .Pour un point M du plan, la droite passant par M et orthogonale à (MF) coupe (AB) en P et (AC) en Q.

1-) Démontrer que : M, F, C et Q d'une part et B, P, F et M d'autre part sont cocycliques.
   En déduire que : $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) + (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[\pi]$.
2-) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels F, P et Q sont alignés.
3-) Déterminer l'ensemble des points M tels que : $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FQ}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})[\pi]$.

Exercice 4

ABC est un triangle non rectangle, O est le centre de son cercle circonscrit (C) et H son orthocentre .Les droites (AH) et (BC) se coupent en Q ; les droites (BH) et (AC) se coupent en R ; les droites (CH) et (AB) se coupent en P .

1-) a-) Montrer que les points A ,B ,Q et R sont cocycliques .
   En déduire que : $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{RA}, \overrightarrow{RQ})[\pi]$.
   b-) On note T un point quelconque de la droite tangente en C au cercle (C).
   Montrer que $(\overrightarrow{RA}, \overrightarrow{RQ}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CT})[\pi]$. puis en déduire que les droites (RQ) et (CT) sont parallèles.
   c-) Montrer que les droites (RQ) et (OC) sont perpendiculaires.
2-) a-) En utilisant la cocyclicité des points A, C, P et Q d'une part ; et Q, C, R et H d'autre part, montrer que : $(\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QA}) = (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QR})[\pi]$.
   b-) En déduire que (AH) est une bissectrice du triangle QRP.

Exercice 5

A et B sont deux points d'un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O non diamétralement opposés .Un point P décrit la droite (AB). Les deux cercles variables $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ passant par P et tangentes à $(\mathscr{C})$ respectivement en A et B se recoupent en M .On suppose que la tangente à $(\mathscr{C}_1)$ en A et la tangente à $(\mathscr{C}_2)$ en B se coupent en un point T .

1-) Faire une figure

2-) Montrer que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB})[\pi]$.

3-) En déduire le lieu géométrique des points M du plan lorsque P décrit la droite (AB) (P est distinct de A et de B).

Exercice 6

Soit $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ deux cercles sécants en A et en B. Soit I un point de $(\mathscr{C})$ distinct de A et de B et soit J un point de $(\mathscr{C}')$ distinct de A et de B tels que I, J et A ne soient pas alignés Une droite passant par B coupe $(\mathscr{C})$ en M et $(\mathscr{C}')$ en N. On suppose que les droites (IM) et(JN) sont sécants en K. Démontrer que les points A, I, J et K sont cocycliques.

Exercice 7

Les parties I-) , II-) et III-) sont indépendantes

I-) Soit ABC un triangle ; P, Q, R sont des points respectifs des droites (BC), (AC) et (AB) tels que les cercles circonscrits aux triangles AQR et CPQ soient sécants en deux points Q et I. Montrer que le cercle circonscrit au triangle BRP passe par I .

II-) Soit ABC un triangle isocèle de sommet A, M un point du cercle circonscrit au triangle ABC distinct des sommets du triangle. La droite (AM) coupe la droite (BC) en P. Montrer que le cercle circonscrit au triangle BMP est tangent à (AB) en B.

III-) On considère deux cercles sécants en A et B .On mène par A une sécante rencontrant respectivement les cercles en M et N, par B une sécante les rencontrant respectivement en M' et N'. Montrer que les droites (MM') et (NN') sont parallèles.

Exercice 8

Soit ABCD un quadrilatère convexe de diagonales [AC] $[AC]$ et [BD] $[BD]$ se coupant en I I .Soit P ,Q ,R et S les projetés orthogonaux respectifs de I I sur (AB),(BC), (CD) et (DA).

1-) Construire la configuration précédente.

2-) Montrer que les points A, P, I et S sont cocycliques. Citer trois autres cocyclicités similaires.

3-) a-) Montrer que : $(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC})[\pi]$.

b-) Montrer que : $(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}) = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})[\pi]$.

4-) En déduire que : $(\overrightarrow{PS}, \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RS}) = (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{CA})[\pi]$.

5-) Montrer que les points P,Q et S et R sont cocycliques si et seulement si les diagonales $[AC]$[AC] et [BD] et $[BD]$ sont perpendiculaires .Illustrer cette situation sur une figure.

Exercice 9

Soit H l'orthocentre d'un triangle ABC non aplati et non rectangle.

1-) Montrer que H est différent de A , B et C .

2-) Calculer $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB})$ en fonction de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

3-) Soit K_C l'image de H par la réflexion par rapport à la droite (AB). Montrer que les points A ,B et C et K_C sont cocycliques.

4-) Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et soit C_A,C_B et C_A les images de (C) par les réflexions par rapport respectivement aux droites et (BC) ,(CA) et (AB) . Montrer que H est l'unique point commun aux trois cercles C_A,C_B et C_A

0.8.3 Trigonométrie

Exercice 1

1-) Simplifier les expressions suivantes :

a-) $A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(x - \pi) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \cos(\pi + x) + \sin(-x)$

b-) $B = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(x + 2\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi + x) + \cos(-x)$

c-) $C = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$

d-) $D = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos(\pi - x) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\sin(\pi + x)$

e-) $E = \cos^3 x + \cos^2 x \sin x + \sin^3 x$

2-) On pose :
$I = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$ et $J = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8}$
Calculer $I + J$ et $I - J$. En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 2

1-) a-) En déduire que : $2\sin\frac{\pi}{7}(\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}) = \sin\frac{6\pi}{7}$

b-) Démontrer que : $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

2-) Montrer que pour tout réel x on a :

a-) $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ **b-)** $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$

3-) Montrer que pour tout réel a et b , on a : $\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b) = 1 + \sin 2a \sin 2b$

Exercice 3

1-) Démontrer que pour tout réel x :

a-) $\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$ **b-)** $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$

2-) Transformer les sommes suivantes en produit :

a-) $A(x) = \sin x + \sin 2x + \sin 3x$ **b-)** $B(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$

c-) $C(x) = 1 + \cos 2x + \cos x$ **d-)** $D(x) = 1 + \sin x + \cos 2x$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1-) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$ **2-)** $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$

3-) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$ **4-)** $\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

5-) $4\sin^2 2x - 4\sqrt{3}\sin 2x + 3 = 0$ **6-)** $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$

7-) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x + \sqrt{6} = 0$ **8-)** $\cos^2 x - 2\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 2$

9-) $3 + 8\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$ **10-)** $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

Exercice 5 Résoudre dans D les équations suivantes :

1-) $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $D = [-\pi; \pi[$ **2-)** $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $D = [0; 2\pi[$

3-) $3\tan^2 x - 1 = 0$ $D = [-\pi; \pi[$ **4-)** $\tan^2 x + (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} = 0$ $D = [0; 2\pi[$

5-) $\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) + \sin 2x = 0$ $D = [-\pi; 2\pi[$ **6-)** $\sin 2x = \cos x$ $D = [0; 2\pi[$

Exercice 6 Résoudre dans D les inéquations suivantes :

1-) $2\cos x \leq -\sqrt{2}$ $D = [-\pi; \pi[$ **2-)** $2\sin 2x - 1 \geq 0$ $D = [0; 2\pi[$

3-) $4\sin x\cos x \geq -\sqrt{3}$ $D = \mathbb{R}$ **4-)** $\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x \leq -\sqrt{2}$ $D = [-\pi; \pi[$

5-) $4\sin^2 x + 2(\sqrt{2} - 1)\sin x - \sqrt{2} \leq 0$ $D = [0; 2\pi[$ **6-)** $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{2}$ $D = [0; 2\pi[$

Exercice 7

Résoudre dans D les inéquations suivantes :

1-) $(2\cos x - \sqrt{3})(2\sin x - 1) \leq 0$ $D = [-\pi; \pi[$ **2-)** $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x \geq 0$ $D = [0; 2\pi[$

3-) $\frac{1 - 2\cos x}{2\cos x + \sqrt{3}} \leq 0$ $D = [-\pi; \pi[$ **4-)** $\frac{2\cos 2x - 1}{2\cos 2x + 1} \leq 0$ $D = [0; \pi[$

Exercice 8

1-) Résoudre dans D les systèmes d'inéquations suivantes : a-) $\begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\sin x + 1 \geq 0 \end{cases}$ $D = [0; 2\pi[$

b-) $\begin{cases} \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$ $D = [-\pi; \pi[$ c-) $\begin{cases} \sin 2x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 2x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $D = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

2-) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes d'équations suivantes :

a-) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3} \\ \sin x - \sin y = 0 \end{cases}$ b-) $\begin{cases} 2x - y = \pi \\ \cos x + \cos 3y = 0 \end{cases}$

c-) $\begin{cases} \sin x = \sin 2y \\ \cos 2x = \cos y \end{cases}$ d-) $\begin{cases} \tan(x + y) = \sqrt{3} \\ \cot(x - y) = 1 \end{cases}$

Exercice 9 Soit a un nombre réel vérifiant : $\sin a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$.

1-) Calculer $\cos 2a$ puis $\cos 4a$.

2-) Démontrer que a a est l'une des solutions de l'équation $\cos 4x = \sin x$ (1) .
Résoudre alors l'équation (1). En déduire la valeur de a.

Exercice 10

1-) Montrer que : $\dfrac{2\tan\frac{\pi}{12}}{1-\tan^2\frac{\pi}{12}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2-) En déduire que le réel $\tan\dfrac{\pi}{12}$ est solution de l'équation : $x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 = 0$

3-) Sans utiliser la machine, déterminer $\tan\dfrac{\pi}{12}$ puis interpréter la seconde solution de l'équation.

3-) Calculer $A = \tan^2\dfrac{\pi}{12} + \tan^2\dfrac{7\pi}{12}$ et $B = \tan^4\dfrac{\pi}{12} + \tan^4\dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 11

1-) Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2-) On considère l'équation : $(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x + (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x = 2$.

a-) Résoudre alors cette équation.

b-) Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique

3-) a-) Démontrer que $\cos^2 a - \sin^2 b = \cos(a+b)\cos(a-b)$.

b-) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos^2\left(x+-\dfrac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(x+-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{8}$

Exercice 12

On considère l'équation : $\sin 3x = -\sin 2x$ (1)

1-) Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ puis l'intervalle $]-\pi;\pi]$.
Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

2-) a-) Démontrer que : $\sin 3x = \sin x(4cos^2 x - 1)$.

b-) En déduire que l'équation (1) est équivalente à : $\sin x(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$

c-) Parmi les solutions trouvées pour (1) , lesquelles sont aussi solution de l'équation : $4\cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$?

3-) On pose $X = \cos x$.Résoudre alors l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$
En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

Exercice 13 Résoudre dans $\mathbb{R}$ où x est l'inconnue et a le paramètre réel de l'intervalle $[-\pi;\pi]$:

1-) $x^2 - (\cos a + \sin a)x + \sin a \cos a = 0$.

2-) $(\cos a)x^2 - (\sin^2)x - \cos a$.

Exercice 14 On se propose de résoudre l'équation : $2\cos x + \sin x = 1$ (1)

1-) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ X^2 + y^2 \end{cases}$

2-) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation (1).

3-) Proposer une autre méthode de résolution de l'équation (1).

Exercice 15 Soit x et y deux réels de l'intervalle $[0;\pi[$.On considère le système suivant (S)

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} \\ \sin x \sin y = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

1-) Montrer que le système (S) est équivaut à (S') : $\begin{cases} \cos(x+y) = \dfrac{1}{2} \\ \cos(x-y) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

2-) Résoudre alors (S') puis en déduire les solutions de (S).

Exercice 16 Soit ABC un triangle non rectangle.

1-) Démontrer que : $\tan(\hat{A} + \hat{B}) = -\tan \hat{C}$

2-) Prouver que : $\tan \hat{A} + \tan \hat{B} + \tan \hat{C} = \tan \hat{A} \tan \hat{B} \tan \hat{C}$

3-) Montrer que : $\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = 4 \cos \dfrac{\hat{A}}{2} \cos \dfrac{\hat{B}}{2} \cos \dfrac{\hat{C}}{2}$.

Angles Associés

Transformations trigonométriques

Équations-Inéquations et systèmes

0.8.4 Applications Affines Et Isométrie

Série d'exercices 12 2014-2016 : Transformations du plan et Isométrie

Exercice 1 :

1) ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre D. Dans chacun des cas des suivants, déterminer la droite (Δ) telle que :

a) $R_{\left(A\,;\,\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(\Delta)} \circ S_{(AB)}$

b) $R_{\left(O\,;\,\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(OA)} \circ S_{(\Delta)}$

c) $R_{\left(A\,;\,\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(OA)} \circ S_{(\Delta)}$

2) ABCD est un carré de sens direct et de centre O. Déterminer les applications suivantes :

a) $R_{\left(B\,;\,\frac{\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(C\,;\,\frac{\pi}{3}\right)}$

b) $R_{\left(A\,;\,\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$

c) $R_{\left(C\,;\,\frac{\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(B\,;\,\frac{\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(A\,;\,\frac{\pi}{3}\right)}$

Exercice 2 :

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. On désigne par Γ le cercle circonscrit à ABC et O son centre. La médiatrice de [BC] coupe Γ en A et D. On note A' le point d'intersection de des droites (BD) et (AC).

1) Démontrer que A' est le symétrique de A par rapport à C.

2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des transformations suivantes :

$$S_{(BD)} \circ S_{(DC)} \quad ; \quad S_{(CA)} \circ S_{(AB)} \quad ; \quad S_{(DC)} \circ S_{(CA)}$$

3) On note $f = S_{(BD)} \circ S_C \circ S_{AC}$.

a) Déterminer $f(A)$ puis la nature et les éléments caractéristiques de f.

b) En déduire la nature de la transformation $S_{(BD)} \circ S_C$.

Exercice 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, f l'application du plan qui associe à tout point $M(x;y)$ le point $M'(x';y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + \dfrac{1}{2}y \\[2ex] y' = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie.

2) Montrer que f admet un unique point invariant.

3) En déduire que f est une rotation dont on précisera son centre et son angle.

4) Soit S la symétrie orthogonale d'axe $(D) \quad : \quad y = x$. Démontrer qu'il existe une symétrie orthogonale S' telle que $f = S' \circ S$ dont on déterminera l'axe.

Exercice 4 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct, OAB rectangle et isocèle en O. On a donc $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\frac{\pi}{2}$ et S_O la symétrie centrale de centre O. On place un point C, non situé sur la droite (AB), on trace les carrés BEDC et ACFG directs. On a donc : $(\overrightarrow{BE}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{AC}\ ;\ \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1) a) Déterminer $S_{(AO)} \circ S_{AB}$ composée de réflexions d'axes (AB) et (AO).

b) En écrivant R_B sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que $R_A \circ R_B = S_O$.

2) **a)** Déterminer l'image de E par $R_A \circ R_B$.

b) En déduire que O est milieu de [EG].

c) On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle.

α) Étudier l'image de C par la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$.

β) Déterminer la transformation $R_F \circ S_O \circ R_D$.

d) Placer H le symétrique de D par rapport à O.

α) Démontrer que $R_F(H) = D$.

β) En déduire que le triangle FHD est rectangle et isocèle en H.

Exercice 5 :

OAB est un triangle isocèle OA=OB. P est un point du segment [AB] , $P \neq A$ et $P \neq B$. La parallèle à (OB) passant par P coupe (OA) en A', la parallèle à (OA) passant par P coupe (OB) en B'.

1) Montrer que OA'=BB'.

2) En déduire qu'il existe une unique rotation r telle que $r(O) = B$ et $r(A') = B'$. Préciser son angle θ. Puis déterminer son centre Ω.

3) Démontrer que les points O, A', B' et Ω sont cocycliques.

Exercice 6 :

ABC est un triangle tel que $AB < AC$ et $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$ On désigne par Γ le cercle circonscrit à ABC et O son centre. Soit E le milieu de [BC] et P le point de (AC) tel que AB=CP. La droite (OE) coupe Γ en I et J, tels que J et A soient sur le même arc de corde BC.

1) **a)** Faire une figure.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $(\overrightarrow{MB} ; \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$

2) **a)** Justifier qu'il existe une unique rotation R telle que : $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Déterminer son angle.

b) Démontrer que son centre est un point de Γ, que l'on précisera .

c) Quelle est la nature du triangle JAP ?

3) **a)** Déterminer l'image de C par $R \circ S_E$, où S_E est la symétrie de centre E.

b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $R \circ S_E$.

Exercice 7 : Bac C 1994

On considère un triangle direct ABC.On appelle I, J et K les milieux respectifs des cotés[BC], [CA] et [AB]. Soit N l'image de C par la rotation de centre J et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et P l'image de A par la rotation de centre K et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que KP = IJ.

2) On appelle r la rotation qui transforme K en J et P en I. Quelle est une mesure de l'angle de cette rotation ?

3) Démontrer que les triangles IJN et IKP sont isométriques. En déduire l'image I de par r et que le triangle PIN est isocèle et rectangle en I.

4) On appelle r_1 la rotation de centre N et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_2 la rotation P de centre et d''angle $\frac{\pi}{2}$.

   a) Déterminer l'image de B par $r_1 \circ r_2$.

   b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r_1 \circ r_2$.

Exercice 8 :

Dans le plan orienté P, on considère un triangle équilatéral ABC direct. On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Pour tout point M du plan, on pose N =r_1(M), M'=$r_2(N)$. On pose r=$r_2 \circ r_1$.

1) a) Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). Déterminer r(D) et r(B).

   b) Montrer que r est la symétrie centrale par rapport au milieu Ω de [BD].

2) a) Montrer que l'ensemble Γ des points M du plan tels que N, M et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω. (on pourra considérer l'angle $(\overrightarrow{M\Omega}\ ;\ \overrightarrow{MA})$).

   b) Prouver que Γ admet [AD] pour diamètre et que le milieu I de [AB] appartient à Γ. Construire Γ⊻.

Exercice 9 :

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$. Pour tout M point, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par R_A et R_B.

1) On considère la transformation $T = R_B \circ R_A^{-1}$.

   a) Construire le point C image du point A par T.

   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T.

   c) En déduire la nature du quadrilatère M_1M_2CA.

2) On suppose que le point M décrit le cercle Γ de diamètre [AB].

   a) Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 décrit par le point M_2 quand M décrit Γ.

   b) Soient I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [BC]. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$.

   c) Déterminer l'ensemble Γ_3 décrit par le point P, milieu de $[M_1M_2]$ quand M décrit Γ.

Exercice 10 :

ABC est un triangle de sens direct, ABED et ACGF sont des carrés construits extérieurement à ABC sur les cotés [AB] et [AC]. On désigne par H le projeté orthogonal de A sur [BC], K le milieu de [DF], I centre du carré ABED et J centre du carré ACGF.

1) Soient les quarts de tours directs R et R' de centres respectifs I et J. Démontrer que $R \circ R' = R'^{-1} \circ R^{-1} = S_K$ (avec symétrie S_K de centre K).

2) Déterminer l'image de la droite (AH) par S_K. En déduire que les K, A et H points sont alignés.

3) Soit A' l'image de du point A par S_K.

  a) Démontrer que $R(C) = A'$. En déduire que (EC) et (A'B) sont orthogonales.

  b) Démontrer que (BG) et (A'C) sont orthogonales.

4) En déduire des questions précédentes que les droites (EC), (BG) et (AH) sont concourantes.

Exercice 11 :

On note H l'orthocentre du triangle équilatéral ABC . On désigne par r_A ,r_B et r_C les rotations de centres respectifs A, B et C et de même angle $\frac{\pi}{3}$ et on pose : $f = r_A \circ r_B$ et $g = r_C \circ r_B \circ r_A$.

1) Calculer f(A) , f(B) et g(B) et en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f et de g.

2) On désigne par $S_{(AB)}$; $S_{(BC)}$ et $S_{(CA)}$ les réflexions d'axes respectifs (AB) , (BC) et (CA) et on pose $h = S_{(CA)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AB)}$ et soit (d) la droite parallèle à (AC) passant par B. Montrer que $S_{(AB)} \circ S_{(BC)} = S_{(d)} \circ S_{(AB)}$.

3) Soit B' le milieu de [AC] . Montrer que $h = t_{2\overrightarrow{BB'}} \circ S_{(AB)}$.

Exercice 12 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que AB=AC et $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. I, J et K sont les milieux respectifs de [BC] , [AC] et [AB]. On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$; et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. On pose $f = r \circ t$ et $g = t \circ r$.

1) Trouver l'image de K par f et celle de J par g. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

2) **a)** Préciser la nature de la composée $g \circ f^{-1}$.

  b) Quelle est l'image de A par $g \circ f^{-1}$? Caractériser alors cette transformation.

  c) M est un point quelconque du plan , M_1 l'image de M par f et M_2 l'image . de l'image de M par g. Donner la nature du quadrilatère ACM_2M_1. Construire.

Exercice 13 : *Bac 94 1er groupe*

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC, rectangle et isocèle en A, tel qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

. On appelle R la rotation de centre A, qui transforme B en C et T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On note I le milieu du segment $[BC]$.

1) Construire $J = R(I)$.

2) $F_1 = R \circ T$ et $F_2 = T \circ R$.
Déterminer $F_1(J)$ et $F_2(I)$ puis en déduire la nature et les éléments caractéristiques de F_1 et F_2.

3) Soit M un point du plan, M_1 son image par F_1 et M_2 l'image de M par F_2. Quelle est la nature du quadrilatère BCM_1M_2

FIN

0.8.5 Similitudes Planes Directes

Applications Affines Et Isométrie-Similitudes Planes Directes

Exercice :1
Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ Rapporté au repère orthonormal direct $(A;\vec{u};\vec{v})$, unité graphique 1 cm, on considère les points B , D définis par $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$ et C tel que ABCD soit un rectangle.
On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de la résolution de l'exercice.

1. Soit E l'image de B par la translation du vecteur $\overrightarrow{DB}$. Déterminer l'affixe z_E de E.
2. Déterminer les nombres réels a et b tels que le point F d'affixe $z_F = 6 - i$ soit le barycentre des points A,B,C affectés des coefficients a, b et 1.
3. On considère la similitude s qui transforme A en E et B en E. A tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', l'image de M par s.
   a. Exprimer z' en fonction de z.
   b. Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude s.
   c. Déterminer les images de C et de D par s.
   d. Calculer l'aire de l'image par s du rectangle ABCD.
4. a. Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan tels que :
$$\|6\overrightarrow{MA} - 10\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 9$$
   b. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques , de l'image de Ω par s.

Exercice :2
Le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), (unité graphique : 2 cm).
On considère l'application f qui à chaque point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = \frac{1}{\overline{z}}$ où $\overline{z}$ désigne le conjugué de z.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives -i et i.

1. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre A et de rayon 1 privé de O.
   a. Pour tout nombre complexe non nul, démontrer que :
   $|z' - i| = |z'|$ équivaut à $|z + i| = 1$
   b. En déduire l'ensemble $\mathscr{C}_1'$ image de $\mathscr{C}_1$ par f ;
   c. Tracer $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_1'$ sur une même figure.
2. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
   a. Montrer que, pour tout nombre complexes z non nul,
   $|z' - i|^2 = 2$ équivaut à $|z + i|^2 = 2$ (on pourra utiliser $|z|^2 = z\overline{z}$).
   b. En déduire l'ensemble $\mathscr{C}_2'$ image de $\mathscr{C}_2$ par f.
   c. Tracer $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_2'$ sur la figure précédente.
3. a. Donner l'écriture complexe de la similitude directe σ de centre Ω d'affixe 1+i , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   b. Montrer que $\sigma \circ f$ est l'application qui, à chaque point d'affixe z non nulle, associe le point M" d'affixe z" telle que $z" = \frac{2i + (3 - i)\overline{z}}{\overline{z}}$.
   c. A l'aide des questions précédentes, déterminer les ensembles Γ_1 et Γ_2 image respectives de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ par $\sigma \circ f$
   d. Tracer Γ_1 et Γ_2 sur la figure précédente.

Exercice :3(1 h)

On suppose le plan rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), (unité graphique : 3 cm).

Partie A

soit trois droites D_1 , D_2 et D_3 sécantes en Ω et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{d_1} = \vec{u}$, et $\vec{d_2}$ et $\vec{d_3}$ supposés unitaires tels que :

$$(\vec{d_1}\,,\,\vec{d_2}) = \frac{\pi}{4} \quad ;et \quad (\vec{d_1}\,,\,\vec{d_2}) = -\frac{2\pi}{3}.$$

On note S_1, S_2 et S_3 les réflexions d'axes respectives D_1 , D_2 et D_3 et f la composée $S_3 \circ S_2 \circ S_1$ de ces trois réflexions.

1. Tracer ces trois droites
2. a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r = S_2 \circ S_1$
   b. Caractériser la réflexion S telle que $r = S_3 \circ S$. On notera D l'axe de S et on en déterminera un point et un vecteur directeur $\vec{d}$. Tracer la droite D.
   c. En déduire la nature de f et les éléments caractéristiques.
3. Justifier que le point E d'affixe $e^{\frac{i\pi}{12}}$ est un point de la droite D.
   Déterminer les nombres complexes a et b tels que la forme complexe de f soit l'application f_1 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_1(z) = a\overline{z} + b$.

Partie B

1. Choisir un point A sur D. On note B son image par S_1, et C l'image de B par S_2. Placer les points B et C.
2. Démontrer que A est l'image de C par S_3.
3. Que peut-on dire du point Ω pour le triangle ABC.

Exercice :4

On se place dans le plan rapporté au repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$.

1. On considère l'application f qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}.$$

   a. Exprimer $(f \circ f)(z)$ en fonction de z.

   b. Montrer que $f = R \circ S$, où R est une rotation et S une symétrie axiale (on déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications R et S).

   c. Décomposer R à l'aide deux symétries axiales et en déduire que f est une réflexion, dont on donnera l'axe D_1.
   Réaliser une figure, en y représentant l'axe D_1. (Unité graphique : 2 cm).

2. On considère l'application g qui à tout point M d'affixe z, associe le point M" d'affixe z" telle que :

$$z'' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

   a. Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de g.

   b. Montrer que $g = T \circ f$, où T est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de la translation T).

   c. Décomposer la translation T à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que g est une réflexion, d'axe noté D_2.

   d. Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$?
   En déduire une construction de la droite D_2, qui n'utilise pas son équation, et l'illustrer en complétant la figure précédente.

Exercice :5

Le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$, (unité graphique : 4 cm). On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 1 \quad , \quad b = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad , \quad c = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

1. a. Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d.

   b. Représenter les points A, B, C et D.

c. Montrer que le quadrilatère est OACB un losange

2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.

3. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.

4. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.

5. Déterminer l'affixe f du point F.

6. On considère la transformation ϕ qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = e^{-i\frac{2\pi}{3}}\bar{z} + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour tout droite δ du plan, on notera σ_δ la symétrie orthogonal d'axe δ.

a. Soit r la transformation qui à tout point M_1 d'affixe z, associe le point M_1' d'affixe z'_1 telle que :

$$z_1' = e^{-i\frac{2\pi}{3}} z_1 + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Déterminer la nature r et donner ses éléments caractéristiques.

b. En utilisant les nombres complexes, donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{AB})$, puis déterminer la droite Δ telle que $r = \sigma_\Delta \circ \sigma_{(AO)}$.

c. Montrer que $\phi = r \circ \sigma_{(AO)}$.
En déduire la nature de ϕ.

Exercice :6

Dans le plan, on considère deux segments [AC] et [BD] tels que : AC=BD et $(\widehat{\overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{BD}}) = -\frac{\pi}{2}$.
On désigne par M le milieu de [AC] et par N celui de [BD].
On appelle (C_1) , (C_2) , (C_3) et (C_4) les cercles de diamètres respectifs [AB] , [BC] , [CD] et [DA]. On pourra s'aider de la figure ci- jointe.

1. a. Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D.Quel est l'angle de r ?
   Montrer que le centre I de r appartient aux cercles (C_1) et (C_3).

   b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B.Quel est l'angle de r' ?
   Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles (C_2) et (C_4).

   c. Quelle est la nature INJM ?

   On désigne par P et R les points diamétralement opposés à I sur, respectivement, (C_1) et (C_3) et par Q et S les points diamétralement opposés à J sur, respectivement, (C_2) et (C_4).

2. Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?

b. En déduire que J est le milieu de [PR].

Exercice :7

Le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}$; $\vec{v}$), (unité graphique : 2 cm).

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenants dans l'exercice

1. Dans cette question on considère l'application s du plan dans lui - même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M', d'affixe $z' = i\bar{z}$.
   a. Montrer que s est une réflexion d'axe noté D et de vecteur directeur $\vec{w}$ d'affixe $1-i$.
   b. Soit d' la droite d'équation $y = -1$, on appelle s' la réflexion d'axe D'.
   Calculer une mesure de l'angle $(\vec{w}\ ,\ \vec{u})$. Déterminer géométriquement la composée de $r = s' \circ s$.
   c. Déterminer l'écriture complexe de r.
2. Dans cette question on considère l'application p du plan dans lui - même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1, d'affixe :
$$z_1 = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}i\bar{z} = \frac{(z+z')}{2}.$$
   a. Soit le point A d'affixe $z = 2+i$, déterminer l'affixe du point A_1, image de A par P.
   b. Montrer que tout point M a son image M_1 situé sur la droite d'équation $y = -x$.
   c. Définir géométriquement, en utilisant les questions précédentes, l'application p.
3. On considère l'application f définie par $f = s' \circ p$.
   Construire l'image A" du point A par f.
   Montrer que $s \circ p = p$ et en déduire que $f = r \circ p$. Montrer que tout point M du plan a son image par f sur une droite Δ , que l'on représentera dans la figure.

Classe : TS_1

Série d'exercices 13 : Homothétie - Similitude plane directe

Exercice 1 :

Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $k \neq 1$, h' l'homothétie de centre O' et de rapport $\frac{1}{k}$.

1) Démontrer que $h' \circ h$ est une translation de vecteur $\frac{k-1}{k}\overrightarrow{OO'}$.

2) Déterminer la nature et éléments caractéristiques de $h \circ h'$.

Exercice 2 :

ABC est un triangle. Soit h et h' les homothéties de centres respectifs B et C et de rapports respectifs 2 et $\frac{-1}{3}$

1) Démontrer que $h' \circ h$ est une homothétie et préciser son rapport.

2) Construire l'image de A par $h' \circ h$ et en déduire une détermination du centre de cette homothétie.

Exercice 3 :
ABC est un triangle. Soit h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et t la translation de vecteur $\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) Justifier $t \circ h$ est une homothétie et préciser son rapport.
2) Construire l'image de A par $t \circ h$ et en déduire une détermination du centre de cette homothétie.

Exercice 4 :
ABC est un triangle rectangle et isocèle en A. Le point I est le point de concours des bissectrices intérieures du triangle. On désigne par r_A la rotation de centre A et $\frac{\pi}{2}$ d'angle et r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1) a) Construire le point A' l'image A de par r_C.
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r_C \circ r_A$ (écrire chaque rotation comme composée se réflexions)
   c) Montrer que $IA = IA'$ et déterminer l'angle $(\overrightarrow{IA}\ ;\ \overrightarrow{IA'})$. En déduire que (AB) et (IA') sont parallèles.
2) Les droites (CI) et (AB) se coupent en E ; K est le point d'intersection de $(A'E)$ et (BI). Soit h_C l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'homothétie h_k de centre k et de rapport $-\sqrt{2}$.
   a) Déterminer $h_C(B)$ et $h_C(E)$. En déduire que : $\overrightarrow{BE} = -\sqrt{2}\overrightarrow{IA'}$.
   b) Quelle est l'image de B par $h_k \circ h_C$?
   c) Quelle est la nature de $h_k \circ h_C$? En déduire que C, K et M milieu de [BC] sont alignés.

Exercice 5 : Bac C 1993
Tous les points considérés dans cet exercice appartiennent à un plan euclidien $\mathcal{P}$.Soient (D) une droite de $(\mathcal{P})$, O un point de (D) et $(\mathcal{C})$ un cercle de centre O ; $(\mathcal{C})$ coupe (D) en A et B. Soient H le milieu de [OB] et I le point $(\mathcal{C})$ de tel que $(\overrightarrow{HB}\ ;\ \overrightarrow{HI}) = \frac{\pi}{2}$. Soient enfin K et J les symétriques respectives de H et I par rapport à O.

1) Montrer que les triangles KAJ et HIA sont directement semblables (On pourra utiliser le triangle HBI).
2) Soit S la similitude directe transformant K, A, J en H, I, A respectivement. Déterminer son angle α et son rapport k.
3) Prouver que les trois cercles de diamètre KH, AI et JA respectivement passent par le centre Ω de la similitude S.
4) Déterminer l'image du point O par la similitude S.

Exercice 6 : Bac C 1996

Dans le plan orienté on considère deux points A et B. On prendra pour la figure AB = 6 cm.

1) Déterminer et représenter l'ensemble ($\mathcal{C}$) des points M du plan tels que :

$$\frac{MA}{MB} = 3$$

2) Déterminer et représenter l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

$$(\overrightarrow{MA}\ ; \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

3) a) Placer le point C image de B par la rotation r de centre A et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$, puis D le point tel que : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

b) On désigne par S la similitude directe transformant A en B et C en D. Déterminer le rapport k et l'angle α de S.

c) On note Ω le centre de S. Exprimer ΩB en fonction de ΩA et donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega A}\ ;\ \overrightarrow{\Omega B}\right)$

d) En déduire la position de Ω et le placer sur la figure.

e) Démontrer que les points Ω, A, C et D sont cocycliques.

Exercice 7 : Bac S_1 1999

On considère, dans le plan euclidien orienté, un triangle ABC équilatéral de sens direct ; on note H le pied de la hauteur issue de C, H_1 le projeté orthogonal H de sur (AC).

1) a) Calculer le rapport $\frac{H_1C}{H_1A}$

b) Déterminer les centres des similitudes directes planes d'angle nul ou plat transformant A en C.

2) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que : $MA = 3MC$.

3) Construire le centre Ω de la similitude plane directe S de rapport 3 et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ telle que S(A) = C.

Exercice 8 : Bac S_1 2001

Dans un plan orienté, on considère un carré direct MNPQ de centre O. Soit I un point de [PN] distinct de N. On note J le point d'intersection de (MI) et de (PQ). La perpendiculaire (Δ) à (MI) passant par M coupe (NP) en K et (PQ) en L.

1) Faire une figure avec $NP = 5cm$; $NI = 2cm$ (On placera (NP) « verticalement » c'est-à-dire parallèlement au grand coté de la feuille).

2) Soit R le quart de tour direct de centre M.

a) Préciser l'image de la droite (NP) par R.

b) Déterminer les images de K et I par R.

c) Quelle est la nature des triangles KMJ et IML.

3) On note E le milieu du segment [IL]; F celui de [JK]; soit S la similitude directe de centre M, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) Préciser les images de K et de I par S.

b) Quel est le lieu géométrique du point E quand I décrit le segment [NP] privé de N.

c) Déduire de ce qui précède que les points O, N, E et Q sont alignés.

Exercice 9 : Bac S_1 2003

Soit ABCD un losange de centre Ω. Le cercle (Γ) de centre O circonscrit au triangle BCD recoupe (OC) en E. Soit G l'isobarycentre des points A, B, C, D et E; et J celui des points O et Ω.

1) a) Démontrer que G est le barycentre de chacun des systèmes $\{(\Omega,4);(E,1)\}$ et $\{(J,4);(A,1)\}$.

b) Soit f l'application du plan dans lui-même associant à tout point M le point M' défini par :

$$4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME}$$

Déterminer la nature de f et préciser ses éléments caractéristiques. Quelles sont les images de E et de A par f ?

2) Soit r la rotation de centre O et d'angle $\theta = (\overrightarrow{OC}\ ;\ \overrightarrow{OD})$ et $S = r \circ f$

a) Démontrer que S est une similitude directe plane. Préciser son angle et son rapport.

b) Construire $H = S(G)$ et $L = S(A)$.

c) Démontrer que le centre I de la similitude directe S appartient aux cercles circonscrits aux triangles OGH et OAL. Construire I.

Exercice 10 : Bac S_1 2003 /2ème groupe

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $(\overrightarrow{BA}\ ;\ \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de [BC] et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

1) Soit S_1 similitude directe de centre A qui transforme H en B.

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S_1

b) Montrer que $I = S_1(C)$. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1.

2) Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C.

a) Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2

b) Soit M un point de (BI), M' son image par S_2

On suppose que M et M' sont distincts de I. Montrer que les quatre points A, M, I et M' sont cocycliques.

Exercice 11 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne r_A par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$;r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par D et E les points tels que : $r_B(A) = D$ et $r_C(D) = E$.

1) Montrer que $r_C \circ r_B \circ r_A$ est la symétrie centrale de centre B. Préciser la position du point E.
2) On admet qu'il existe une seule similitude plane directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B. On nomme S cette similitude. Calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}\ ;\ \overrightarrow{BD})$. En déduire que S(E)=D.
3) Soit Ω le centre de la similitude S. Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et BDE. Construire Ω
4) a) Démontrer que S transforme la droite (AC) en (CB)
   b) Démontrer que l'image par S du cercle circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [BD] En déduire que l'image de C par la similitude S est le point I, milieu du segment [DE].

FIN

0.8.6 Courbes Paramétrées

0.8.7 Coniques

0.9 Géométrie Dans L'espace

0.9.1 Généralités

Série 2 : Géométrie dans l'espace

Exercice 1 :

L'espace E étant rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. On considère les droites D et D' de repères respectifs $(A ; \vec{i})$ et $(B ; \vec{j})$ avec A (0 ; 0 ; 1) et B (0 ; 0 ;-1).

1) Pour tout point M de coordonnées (x , y , z),calculer les distances d(M,D) et d(M,D') en fonction de x , y et z.
2) On désigne par S l'ensemble des points M(x, y, z) tels que d (M, D)=d (M, D'). Trouver une équation de S.

Exercice 2 :

On considère le tétraèdre ABCD .On note I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB] , [CD] , [BC] , [AD] , [AC] et [BD].On désigne par G l'isobarycentre des points A,B,C et D.

schéma tétraèdre

1) Montrer que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que AB=CD, BC=AD et AC=BD. (On dit que le tétraèdre ABCD est équifacial, car ses faces sont isométriques).

2) a) Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Préciser également la nature des quadrilatères IMJN et KNLM.

   b) En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3) a) Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN).

   b) Quelle est la valeur du produit scalaire ? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB). Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD).

   c) Montrer que G appartient aux plans médiateurs de [AB] et [CD].

   d) Comment démontrerait - on que G est le barycentre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD ?

Exercice 3 :

Dans le plan (P) de l'espace, on considère le cercle (C) de diamètre [AB]. Soit Δ la droite passant par A orthogonal à (P) et S un point de Δ distinct de A. On note I le projeté orthogonal de A sur la droite (BS). Pour tout point M du cercle (C), on note H le projeté orthogonal de A sur la droite (MS).

1) Placer les données précédentes sur une figure, Δ étant placée verticalement.

2) Prouver que H appartient à la sphère Σ de diamètre [AS].

3) Dans cette question, on suppose que M est distinct de A et de B. Prouver que la droite (MB) est orthogonale au plan (AMS).En déduire que la droite (AH) est orthogonale au plan (BMS).

4) Montrer que H appartient au plan Π passant par I et orthogonale à la droite (BS).

5) a) Déterminer l'intersection Γ de Σ et Π.

   b) Prouver que l'ensemble décrit par H lorsque M parcourt (C) est égal à Γ. A cet effet, étant donnée un point N de Γ distinct de A, on pourra montrer que le plan (AN'S) coupe (C) en A et en un autre point M.

Exercice 4 :

Soit OABC un tétraèdre trirectangles (les triangles OAB, OBC et OCA sont rectangles en O).

On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC). Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du tétraèdre.

1) **a)** Pourquoi la droite (OH) est-elle orthogonale à la droite (BC) ? Pourquoi la droite (OA) est-elle orthogonale à la droite (BC) ?

b) Démontrer que les droites (AH) et (BC) sont orthogonales. On démontra de façon analogue que les droites (BH) et (AC) sont orthogonales. Ce résultat est admis.

c) Que représente le point H pour le triangle ABC ?

2) L'espace est maintenant muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$. On considère les points A (1 ; 0 ; 0), B (0 ; 2 ; 0) et C (0 ; 0 ; 3).

a) Déterminer une équation du plan (ABC) .

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par O et orthogonale au plan (ABC).

c) Démontrer que le plan (ABC) et la droite (D) se coupe en un point H de coordonnées, $\left(\frac{36}{49} ; \frac{18}{49} ; \frac{12}{49}\right)$.

3) **a)** Calculer la distance du point O au plan (ABC).

b) Calculer le volume du tétraèdre OABC. En déduire l'aire du triangle ABC.

c) Vérifier que le carré de l'aire du triangle ABC est égal à la somme des carrés des aires des autres faces de ce tétraèdre.

Exercice 5 :

On considère le cube ABCDEFGH ci-dessus.O_1 et O_2 sont les centres des carrés des rectangles ABCD et EFGH, et I le centre de gravité du triangle EBD .Soit m un nombre réel et G_m le barycentre du système de points pondérés (E, 1), (B, 1-m), (G, 2m-1), (D, 1-m). SCHEMA CUBE **Partie A :**

1) Justifier l'existence du point G_m.

2) Préciser la position de G_1.

3) Vérifier que G_0=A. En déduire que les points A, I et G sont alignés.

4) Démontrer que $\overrightarrow{AG_m} = m\overrightarrow{AO_2}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m parcourt l'ensemble des nombres réels.

5) **a)** Vérifier que les points A, G_m, E et O_1 sont coplanaires.

b) Déterminer la valeur de m pour laquelle G_m est sur la droite (EI).

Partie B :

Dans cette question, l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD} ; \overrightarrow{AE})$.

1) Démontrer que la droite (AG) est orthogonal au plan (EBD). En déduire une équation cartésienne du plan (EBD).

2) Déterminer les coordonnées du point G_m .

3) Pour quelle valeur de m la distance de G_m au plan (EBD) est égal à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 6 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct. ABCDEFGH est le cube représenté ci-dessus. Son arête a pour longueur 1, I le centre de ABCD.

SCHÉMA CUBE

1) a) Déterminer $\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BA}$.

b) En déduire l'ensemble (E_1) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BA}) \wedge \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0}$.

c) Déterminer l'ensemble (E_2) des points M de l'espace tels que : $(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BA})\overrightarrow{BM} = 0$.

2) a) Soit $P = bar\{(A\ ;\ 2)\ ;\ (C\ ;\ -1)\}$. Montrer que P est le symétrique de C par rapport à A.

b) Soit (Γ) l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}\| = \| - \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$.

α) Déterminer l'ensemble (Γ). Montrer que : $A \in (\Gamma)$.

β) Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :
$\|8\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$.

Exercice 7 :

Soit un repère orthonormé direct de l'espace $(O\ ;\ \overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\ ;\ \overrightarrow{OC})$.

1) G est l'isobarycentre de A, B et C.

a) Donner les coordonnées de G.

b) Montrer que (OG) est perpendiculaire à (ABC).

2) Soit A' (2 ; 0.0), B' (0 ; 2 ; 0) et C' (0 ; 0 ; 3).

a) Déterminer $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$.

En déduire qu'une équation de (A'B'C') est : $3x + 3y + 2z = 6$

b) Montrer que : $M(x\ ;\ y\ ;\ z) \in (AC) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 0 \\ z = k \end{cases}$

c) Déterminer les coordonnées de K commun à (AC) et (A'B'C') .

3) a) Montrer que le point L commun à (BC) et (A'B'C') a pour coordonnées (0 ;4 ;-3)

b) Montrer que (AB) //(A'B')//(LK).

Exercice 8 :

Soit ABCDEFGH un cube tel que $(\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$ est une base orthonormée directe .On désigne par I le milieu de [EF] et par J le centre du carré ADHE.

1) Vérifier que : $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BJ}$. Puis en déduire l'aire du triangle IGA.

2) Calculer le volume du tétraèdre ABIG et en déduire la distance du point B au plan (IGA).

Exercice 9 :

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F .Dans tout l'exercice l'espace est rapporté à un repère orthonormal (A ; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AE}$).

1) a) Déterminée les coordonnées des points I et J.

b) Vérifier que $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI).

c) En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).

d) Calculer la distance du point F au plan (BGI).

2) On désigne (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.

c) Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{6} ; \frac{5}{6}\right)$.

d) Le point L est-il orthocentre du triangle BGI ?

Exercice 10 :

Soit P_1, P_2 et P_3 les plans d'équations :

$P_1 : x - 2y + z - 5 = 0$

$P_2 : 3x + 5y + 7z + 4 = 0$

$P_3 : y + z + 3 = 0$

1) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires.

2) Déterminer une équation paramétrique de l'intersection D des plans P_1 et P_2.

3) En déduire que P_1, P_2 et P_3 ont un unique point commun et calculer ses coordonnées.

FIN

0.9.2 Produit Vectoriel

0.9.3 Transformations Affines

Lycée Khassim Mbacké **Année scolaire : 2011/2012**

M. Fall **Classe : TS1**

Transformations de l'espace

Exercice : 1

L'espace E est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. On considère l'application v de E dans E qui à tout point M(x ; y ; z) associe le point MM'(x' ; y' ; z') tel que : $\begin{cases} x' = -x+2 \\ y' = z+1 \\ z' = y+1 \end{cases}$

1) Soit A(1 ; 0 ; 0) et h_1 l'homothétie de centre A et de rapport 2 . Soit $f = h_1 \circ v$. Démontrer que f admet un unique point invariant B.

2) Soit $r = h_2 \circ f$, où h_2 est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$. Démontrer que r est un demi-tour dont on précisera l'axe (D) .

3) En déduire que v est la composée du demi-tour r et d'une rotation dont le vecteur à préciser est un vecteur directeur de (D).

Exercice : 2

Dans l'espace on considère un tétraèdre ABCD. Pour tout réel k on définit l'application f_k de l'espace dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que :

$$MM' = MA + 3MB - 2MC + kMD$$

. Préciser suivant les valeurs de k la nature et les éléments caractéristiques de f_k.

Exercice : 3

L'espace orienté (E) est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$. Soit f l'application de E dans E qui à tout point M de coordonnées (x ; y ; z) associe le point M' de coordonnées (x' ; y' ; z') tel que : $\begin{cases} x' = y \\ y' = z+1 \\ z' = x-1 \end{cases}$

1) **a)** Montrer que f est une isométrie.

b) Montrer que l'ensemble des points invariants par est la droite Δ passant par A de coordonnées (0, 0, -1) et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

2) Soit P le plan perpendiculaire à Δ en A.

a) Montrer que le point I de coordonnées (-1 ; 0 ; 0) appartient à P

b) Prouver que I' = f(I) appartient à P .

3) Déterminer la nature de f et ses éléments géométriques caractéristiques.

4) Déterminer l'ensemble des points M de E d'images M' tels que le milieu J de [MM'] appartient :

a) Au plan Q d'équation cartésienne 2 x + y - z = 0.

b) A la droite (D) dont un système d'équations cartésiennes est : x=y=z.

Exercice : 4

Dans l'espace orienté, considère deux points distinctes A et D,et le plan (P)orthogonal en A à

la droite (AD) On convient d'orienter (P) en choisissant pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{AD}$ Dans le plan (P), on considère deux points B et C tels que le triangle ABC soit équilatéral de sens direct .On pose AB=AC=BC=a. On note I le milieu du segment [BC]

1) **a)** Placer les éléments précédents sur la figure (On représentera AD ascendant).

b) Montrer que le plan (IDA) est le plan médiateur du segment [BC]

2) Soit S_1 la réflexion par rapport au plan (ABC) et S_2la réflexion par rapport au plan (DBC). On note $r = S_1 \circ S_2$.

a) Indiquer l'image de D par r et déterminer l'axe et l'angle de la rotation r. (Le plan (DBC)sera orienté de telle sorte que $(\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}$

b) Déterminer, en fonction de ,la distance AD pour que l'angle de r admette pour mesure $\dfrac{\pi}{2}$

<u>Exercice : 5</u> Bac S_1 1999

Soit ABCD un tétraèdre régulier, G son centre de gravité et H celui du triangle ABD. On note , I, J, K et L les milieux respectifs des segments[AD] [BC] [AC] [BD]

1) **a)** Démontrer que les droites (IJ) et (KL)se coupent en G.

b) Démontrer que la droite (CG) perce le plan (ABD) en H.

c) Placer sur une figure les données précédentes

2) Soient S_1 la réflexion par rapport au plan (BIC) et S_2 la réflexion par rapport du plan (ALC).On pose r=$S_2 \circ S_1$.

a) Montrer que (BIC)est le plan médiateur du segment [AD]; en déduire les images de A et de D par S_1. Déterminer de même les images de B et D par S_2

b) Déterminer les images des points A, B, C,D et G par r.

c) Montrer que r est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

<u>Exercice : 6</u> Bac S_1 2000

ABCDEFGH est le cube ci-dessous représenté. SCHEMA O est son centre du cube , I est le milieu de [AB], J le centre de gravité de la face DCGH.

1) **a)** Montrer que (ABG)est le plan médiateur des segments [ED]et [FC].

b) On note S_1, S_2 et S_3 les réflexions dont les plans respectifs sont (ABG), (BCH) et (IOJ) .Vérifier que ces réflexions laissent invariant le cube ABCDEFGH.

2) on considère l'application f telle que : f=$S_1 \circ S_2$

a) prouver que f est une rotation d'axe (BH).

b) En orientant le plan (ACF)par déterminer la restriction de f à ce plan. En déduire l'angle de f .

3) Soit r le demi-tour d'axe (OI) et g l'application $r \circ f$.

a) En écrivant comme la composée de 2 réflexions judicieusement choisies, déterminer la nature de g.

b) Déterminer les éléments caractéristiques de g.

Exercice : 7

On considère dans l'espace quatre points A, B, C, D tels que : AC=AB=BC=BD=AD=a (a réel positif donné)

1) a) I étant le milieu du segment [AB], montrer que les droites (IC)et (ID) sont perpendiculaires à la droite (AB).

b) Montrer que IC = ID, exprimer cette longueur en fonction de a

2) Soit S_1 la réflexion de plan (ABC) et S_2 la réflexion de plan (ABD)

a) Quelle est la nature de la transformation $R = S_1 \circ S_2$?

b) Déterminer en fonction de la longueur x=CD pour que soit une rotation d'angle plat.

FIN

0.10 Dénombrement

Exercice 1

Un ensemble E contient 320 éléments .Trois sous ensembles A , B et C de E sont tels que :

- A et B sont disjoints;
- $Card(A \cap B) = Card(B \cap C)$
- $Card(A \cup B \cup C) = 221$
- $[(A \cup B) \cap \overline{C}]$ $Card(\overline{C} \cap A] = 48$ *et* $Card(C \cap \overline{A \cup B})$

1-) Déterminer les cardinaux des ensembles A , B et C .

2-) Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

a-) $(A \cup B) \cap C$ **b-)** $\overline{A} \cap \overline{B}$ **c-)** $\overline{A} \cup \overline{C}$

Exercice 2

Une urne contient 5 boules rouges, 4 boules blanches et 2 boules jaunes. On tire successivement 4 boules de l'urne en remettant à chaque tirage la boule tirée dans l'urne. Déterminer le nombre de tirages contenant :

1-) Quatre boules rouges;

2-) Une boule rouge et trois boules blanches dans cet ordre;

3-) Une boule blanche et trois boules jaunes;

4-) Quatre boules de même couleur;

5-) Autant de boules blanches que de boules rouges ;

6-) Au moins une boule rouge ;

7-) Au plus 3 boules blanches.

Exercice 3

Un commerçant achète un coffre-fort dont l'ouverture est commandée par un code à 6 chiffres.

1-) Calculer le nombre total de codes différents qu'il est possible d'avoir (le code 000 000 étant bien entendu possible).

2-) Calculer le nombre de codes composés de 2 chiffres différents, l'un étant utilisé une fois, l'autre 5 fois.

Exercice 4

Une urne contient 7 boules blanches et 6 boules rouges .On tire successivement sans remise 5 boules de l'urne .Déterminer le nombre de tirages contenant :

1-) Trois boules blanches et deux boules rouges ;

2-) Une boule blanche et quatre boules rouges dans cet ordre ;

3-) Au moins trois boules rouges ;

4-) Cinq boules de même couleur.

Exercice 5

Un sac contient 10 boules blanches numérotées de 1 à 10 , deux boules rouges numérotées 1 et 2 et enfin trois boules noires numérotées de 1 à 3 .On tire simultanément 3 boules du sac . Déterminer le nombre de tirages comportant :

1-) Trois boules blanches ;

2-) Un boule rouge et deux boules noires ;

3-) Trois boules de même couleur ;

4-) Trois boules portant le même numéro ;

5-) Trois boules de numéros pairs.

Exercice 6

Une assemblée de 12 personnes se compose de 5 hommes et 7 femmes .Les membres de cette assemblée se proposent de désigner un comité de 6 personnes. De combien de façon peut-on constituer un comité comprenant :

1-) Deux hommes et deux femmes seulement.

2-) Au moins une femme.

Exercice 7

1-) Le code PIN d'un portable est un nombre de quatre chiffre choisis parmi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.

a-) Quel est le nombre de codes possibles ?

b-) Quel est le nombre de codes formés de quatre chiffre deux à deux distincts ?

2-) Le téléphone portable étant éteint, le propriétaire voulant l'allumer sait que les quatre chiffres de ce code sont 1, 9,9 et 5 mais il ignore l'ordre de ces chiffres. Combien de codes différents peut-on composer avec ces quatre chiffres ?

Exercice 8

Une classe de 20 élèves est constituée de 8 filles et 12 garçons .On veut désire former un bureau de 3 membres composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier.

1-) Déterminer le nombre de bureau possibles.

2-) Déterminer le nombre de bureau formés uniquement de filles.

3-) Déterminer le nombre de bureau dont le poste président est occupé par un garçon.

4-) Déterminer le nombre de bureau contenant au moins un garçon.

5-) Déterminer le nombre de bureau contenant exactement une fille.

6-) Déterminer le nombre de bureau où la fille Ami ne peut pas siéger avec le garçon Modou.

Exercice 9

On lance trois fois de suite un dé non pipé (dont les faces sont numérotées de 1 à 6) et l'on désigne par a, b, c les résultats respectifs du premier, du second et du troisième jeu. On considère l'équation sur $\mathbb{R}$:$ax^2 + bx + c$ (1) et on appelle résultat la donnée du triplé (a, b, c). Déterminer le nombre de résultats tels que :

1-) L'équation (1) admet une solution double.

2-) L'équation (1) n'admet pas de solutions réelles.

Exercice 10

On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code et d'un système d'alarme Une porte est munie d'un dispositif portant les touches 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 et A , B , C , D .La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois chiffres et deux lettres qui forment un code .Les chiffres sont nécessairement distincts , les lettres non.

1-) Quel est le nombre de codes possibles ?

2-) Déterminer le nombre de codes répondant à chacun des critères suivants :

a-) Les trois chiffres sont pairs ;

b-) Les deux lettres sont identiques ;

c-) Le code contient deux chiffres impairs.

3-) La porte est équipée d'un système d'alarme se déclenchant lorsqu'aucun des trois chiffres frappés ne figure sur la liste des chiffres du code. Déterminer le nombre de codes déclenchant l'alarme.

Exercice 11

On jette trois fois de suite un dé à six faces numérotées de 1 à 6 et on note successivement les chiffres obtenus sur la face supérieure. On appelle résultat le triplet de numéros obtenu.

1-) Combien de résultats peut-on obtenir ?

2-) Combien y a-t-il de résultats comportant 2 et seulement 2 chiffres identiques peut-on obtenir ?

3-) Combien y a-t-il de résultats comportant 3 chiffres identiques ?

4-) Combien y a-t-il de résultats qui ont au moins uns fois 6 ?

5-) Combien y a-t-il de résultats dont la somme des chiffres du triplet est égal à 6 ?

Exercice 12 Dans 1 lot de 20 pièces fabriquées dont 6 sont défectueuses. On en prélève 4. De combien de façons différentes peut-on faire le prélèvement dans les cas suivants

1-) les quatre pièces sont bonnes.

2-) une au moins d' entre est-elle mauvaise ?

3-) deux au moins sont mauvaises.

4-) exactement deux sont mauvaises

5-) au plus trois sont mauvaises.

6-) toutes sont mauvaises.

Exercice 13 Démontrer les relations suivantes.
$A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}$; $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$ et $A_{n+1}^p = (n+1)A_n^{p-1}$
puis résoudre dans l' équation :

$$x^2 - A_n^p x + pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p = 0$$

(E) : $C_n^p = C_n^q \Leftrightarrow p = q$ *ou* $p + q = n$; puis résoudre dans $\mathbb{R}$ $C_{3x+2}^{x+1} = C_{3x+2}^{x^2+2x-8}$

Exercice 14
Douze livres sont à ranger sur sept étagères vides .

1-) Dénombrer les rangements possibles

2-) Dénombrer les rangements tels que toutes les étagères reçoivent au moins un livre .

Exercice 15 Dans le comité pédagogique d'une école composé de 8 membres, on souhaite représenter les quatre filières de recrutement. Aussi doit-il comporter 1 membre de la filière A, 2 membres de la filière B, 2 membres de la filière C, 3 membres de la filière D. Sachant que la population de la filière A est de 10, celle de la filière B de 18, celle de la filière C de 22 et celle de la filière D de 30, calculer :

a-) de combien de façons peut-on composer la représentation de la filière A ?

b-) même question pour la filière B ;

c-) même question pour la filière C ;

d-) même question pour la filière D ;

e-) de combien de manières peut-on constituer ce comité pédagogique ?

Exercice 16

I-) Propriétés

Démontrer les propriétés suivantes $C_n^p \times C_{n-q}^{p-q} = C_p^q \times C_n^p$ et $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$

II-) Dénombrement Soit l' ensemble E = -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2.On tire successivement sans remise 3 éléments a ; b ; c de l' ensemble E. on obtient un triplet (a ;b ;c) d'éléments de E.

1-) Quel est le nombre de triplets distincts qu'on peut obtenir ?

2-) Quel est le nombre de triplets distincts dont la somme : a+b+c = 0 ?

3-) Dans un repère orthonormé O.R.N. On donne les points A(-3 ;0) , B(0 ;-4) et C(2 ;2) Soit G barycentre du système (A ;a) , (B ;b) , (C ;c).

a-) Déterminer le nombre de tirages pour que G existe.

a-) Déterminer le nombre de tirages pour que G = O (centre du repère).